ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 9 NOVEMBRE 1931.

PRÉSIDENCE DE M. Louis de LAUNAY.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Stabilité séculaire des rotors de turbines.* Note (¹) de M. E. Jouguet.

I. Stodola, représentant schématiquement un rotor de turbine à vapeur par un disque porté par un arbre flexible perpendiculaire à son plan, a montré que la rotation de ce système au-dessus de sa vitesse critique était stable si le moment d'inertie du disque était assez grand (²). Mais il résulte d'une remarque de Lamb que cette stabilité n'est pas séculaire et est détruite par des résistances visqueuses à la déformation, si petites qu'elles soient (³). Pour expliquer la stabilité constatée expérimentalement, Lamb invoque alors les résistances à la rotation. Je voudrais présenter quelques commentaires à propos de ces résultats. Il est indispensable, pour rapprocher correctement ceux de Lamb et ceux de Stodola, de préciser les conditions où l'on se place et de ne pas se contenter du criterium de stabilité séculaire utilisé par Lamb.

II. Conformément aux hypothèses de Stodola, le disque est supposé monté assez symétriquement pour que son mouvement se fasse dans son plan qui sera celui de la figure. Soient alors : O l'axe de rotation; W l'attache du disque à l'arbre; OW $= r$ la flèche; G le centre de gravité;

(¹) Séance du 3 novembre 1931.

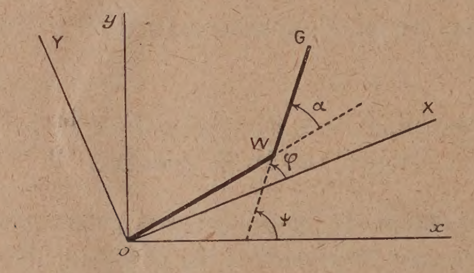
(²) *Turbines à vapeur et à gaz*, 2ᵉ édition française, n° 193.

(³) *Proc. of the Roy. Soc.*, A, 180, 1908, p. 168.

e l'erreur de centrage WG; α l'angle, en mouvement, de WG avec OW; ψ l'angle de WG avec Ox fixe; M la masse du disque; I son moment d'inertie polaire autour de G. On néglige la masse de l'arbre. Les trois paramètres ψ, r, α définissent la position du disque; r et α sont affectés de viscosité (résistances à la déformation); ψ est sans viscosité (variable cyclique). La force vive est

$$(1)\quad 2T = [I + M(r^2 + e^2 + 2er\cos\alpha)]\psi'^2 + Mr'^2 + Mr^2\alpha'^2 - 2Mr(r + e\cos\alpha)\alpha'\psi' - 2Me\sin\alpha\, r'\psi'.$$

La fonction dont le minimum caractérise la stabilité séculaire (criterium de Routh-Poincaré) est la somme de l'énergie cinétique cyclique et du potentiel



des forces autres que la viscosité, lesquelles se réduisent aux forces élastiques de flexion, car on néglige l'effet du poids ([1]);

$$(2)\quad V + J = M\Omega^2\frac{r^2}{2} + \frac{x^2}{2[I + M(r^2 + e^2 + 2er\cos\alpha)]} \qquad \left(x = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \text{const.}\right).$$

En régime, ψ' est constant et égal à ω. Les valeurs correspondantes de r et α sont données en égalant à zéro la différentielle première de $V + J$ en r et α. On trouve

$$(3)\quad \begin{cases} (R_0), & \alpha = 0, \quad r = \dfrac{e\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}, & \text{si } \omega < \Omega \\ (R_\pi), & \alpha = \pi, \quad r = \dfrac{e\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}, & \text{si } \omega > \Omega \end{cases} \qquad (\Omega \text{ vitesse critique}).$$

([1]) Notations de mon Mémoire *Sur la stabilité séculaire* (*Journal de l'Éc. Polyt.*, 2e série, 27e Cahier, 1929, p. 205). Voir aussi ma Note du *Bulletin de la Soc. math. de France*, 58, 1930, p. 34. Je modifie d'ailleurs sur un point la terminologie adoptée dans ces travaux et j'appelle extinction ou annulation des vitesses, extinction ou arrêt des déplacements, effacement de la perturbation ce que j'y ai nommé extinction des vitesses, amortissement et amortissement parfait.

La stabilité est commandée par

$$(4)\quad \delta^2(V+J)=\left[M(r^2-\omega^2)+4M^2\omega^2\frac{1}{M+I\dfrac{(\omega^2-\Omega^2)^2}{e^2\Omega^4}}\right]\delta r^2+\frac{M\omega^4e^2}{\Omega^2-\omega^2}\delta\alpha^2.$$

1° Si $\omega<\Omega$, on a un régime R_0 stable aussi bien ordinairement (sans viscosité) que séculairement (avec viscosité de déformation pour r et α).

2° Si $\omega>\Omega$, on a un régime R_π qui n'est jamais stable séculairement. Quand I est inférieur à $\dfrac{Me^2\Omega^4}{(\omega^2-\Omega^2)^3(\Omega^2+3\omega^2)}$, il n'y a pas non plus stabilité ordinaire, le nombre de coefficients de stabilité négatifs étant impair. Quand I est supérieur, on ne peut encore rien dire sur cette stabilité.

La stabilité séculaire dont il est ici question présente l'extinction des vitesses et des déplacements, mais ne comporte l'effacement de la perturbation que si celle-ci respecte l'x du régime.

III. Dans le problème qui vient d'être traité, l'arbre est lancé en rotation libre, le moment résultant des forces autour de O étant toujours nul. C'est le cas dont la stabilité ordinaire a été étudiée par Stodola.

Supposons maintenant la vitesse réglée par un régulateur, en régime, les forces ont toujours un moment nul; mais, en dehors du régime, apparaît un couple régleur. Bien que Lamb ne signale pas explicitement l'importance du réglage de la vitesse, c'est à ce cas que s'appliquent rigoureusement ses remarques. Un régime est une position d'équilibre relatif par rapport à des axes OXY tournant avec une vitesse constante ω; le système est défini par les trois paramètres φ, r, α $\left(\varphi=\widehat{OX,\ WG}\right)$ affectés tous trois de viscosité, car le couple régleur, qui a le signe de $-\varphi'$ et s'annule avec lui, fonctionne comme une viscosité relative à φ. La stabilité séculaire dépend alors du criterium de Tait et Thomson.

La fonction à considérer est

$$(5)\qquad V+L=M\Omega^2\frac{r^2}{2}-\frac{\omega^2}{2}[I+M(r^2+e^2+2er\cos\alpha)].$$

Les régimes définis par $\delta(V+L)=0$ sont les régimes (3) et leur stabilité est commandée par

$$(6)\qquad \delta^2(V+L)=M(\Omega^2-\omega^2)\,\delta r^2+M\frac{\omega^4e}{\Omega^2-\omega^2}\delta\alpha^2.$$

Il s'agit simplement d'ailleurs de stabilité partielle, au sens de mon Mémoire *Sur la stabilité séculaire*, puisque V + L est indépendant de φ.

1° Si $\omega < \Omega$, on a un régime R_0 présentant à la fois les stabilités ordinaire et séculaire.

2° Si $\omega > \Omega$, on a un régime R_π instable séculairement. On ne sait rien encore sur la stabilité ordinaire, le théorème sur la parité du nombre de coefficients négatifs ne s'appliquant pas à la stabilité partielle.

IV. Ainsi, en rotation libre comme en rotation réglée, si $\omega > \Omega$, il n'y a jamais stabilité séculaire. Or des résistances à la déformation existent toujours dans la réalité. Il faut donc expliquer la stabilité que donne l'expérience. On ne saurait invoquer une liberté supplémentaire, par exemple les petits mouvements faisant sortir le disque du plan de la figure, parce qu'une liberté supplémentaire est incapable de produire une stabilité séculaire [1]. Lamb estime que la stabilité est assurée par les résistances à la rotation d'ensemble. Mais il faut préciser à quelles résistances on peut demander cette stabilisation. Montrons qu'on peut l'obtenir par la résistance de milieu, introduite par Stodola dans l'étude des flèches, et proportionnelle à la surface et au carré de la vitesse de chaque élément du disque. Soient b le coefficient de cette proportionnalité et R le rayon du disque.

Avec cette nouvelle force, le problème ne peut se traiter que par la théorie des petits mouvements. Un régime étant défini par les valeurs ω, r_0, α_0 de ψ', r, α, on a, dans les petites oscillations autour du régime,

$$\psi' = \omega + \varepsilon, \quad r = r_0 + \eta, \quad \alpha = \alpha_0 + \zeta \quad (\varepsilon, \eta, \zeta \text{ petits}).$$

Dans un régime où r_0 est assez petit et dans les petites oscillations autour de lui, le travail virtuel de la résistance de milieu est

$$(7) \qquad -\frac{2}{5}p\omega^2 R^2\left(1 + 2\frac{\varepsilon}{\omega}\right)\delta\psi - p\omega r'\,\delta r + p\omega(\omega - \alpha')\,r^2\,\delta\alpha \qquad (p = \pi b R^3).$$

Pour surmonter cette résistance, il faut appliquer au disque un couple dont le travail virtuel est $N\,\delta\psi$. Le travail virtuel des forces élastiques est $-M\Omega^2 r\,\delta r$; celui de la viscosité de déformation est $-fr'\,\delta r - g\alpha'\,\delta\alpha$, et, éventuellement, celui du couple régleur est $-C(\psi' - \omega)\,\delta\psi$.

Les équations de Lagrange des petits mouvements sont des équations différentielles en ε, η, ζ, qu'il est facile d'écrire, mais que nous ne reproduirons pas ici.

V. Ces équations permettent de voir que la résistance de milieu peut

---

(1) Voir ma Note *Amortissement des oscillations et stabilité séculaire*, art. V (*Congrès de Mécanique appliquée de Stockholm*, 3, 1930, p. 112).

stabiliser les régimes quand elle est suffisante et que I est assez grand. Nous supposerons que, dans les petites oscillations, le moment N garde la valeur $\frac{2}{5}p\omega^2 R^2$ qu'il a en régime.

Pour I très grand, $\varepsilon' = 0$. On peut d'ailleurs, pour étudier la stabilité, supposer $\varepsilon = 0$. L'équation caractéristique du système des équations de Lagrange est alors

$$(8)\quad S^4 + \left[2(\Omega^2+\omega^2) + \left(\frac{p\omega}{M}+\frac{f}{M}\right)\left(\frac{p\omega}{M}+\frac{g}{Mr_0^2}\right)\right]S^2 + (\Omega^2-\omega^2)^2 + \frac{p^2\omega^4}{M^2}$$
$$+ S\left[\left(\frac{f}{M}+\frac{g}{Mr_0^2}+\frac{2p\omega}{M}\right)S^2 + (\Omega^2-\omega^2)\left(\frac{f}{M}+\frac{g}{Mr_0^2}+\frac{2p\omega}{M}\right) + \frac{4p\omega^3}{M}\right] = 0.$$

Il y a toujours stabilité quand toutes les résistances sont nulles. Avec des résistances à la déformation, on a toujours instabilité pour $\omega > \Omega$ s'il n'y a pas résistance de milieu, mais on peut avoir stabilité si l'on a une résistance de milieu suffisante. Le calcul, fait en supposant toutes les résistances petites, donne la condition de stabilité

$$(9)\qquad \frac{p\omega}{M} > \left(\frac{f}{M}+\frac{g}{Mr_e^2}\right)\frac{\omega-\Omega}{2\Omega}.$$

Tout ce qui est dit au présent article V s'applique à la rotation réglée comme à la rotation libre.

VI. En rotation réglée, on peut avoir $\varepsilon = 0$ sans avoir I grand, si l'on a un réglage très raide, avec C considérable. L'article V s'applique encore à ce cas où la grandeur du couple régleur remplace celle du moment d'inertie.

VII. En rotation libre au contraire, l'article V ne convient que pour I grand. On peut d'ailleurs faire les remarques suivantes quand les résistances sont petites, ce qui est le cas de la réalité.

En l'absence de toute résistance, l'équation caractéristique se réduit à $S(S^4 + AS^2 + B) = 0$. En exprimant que toutes ses racines ont des parties réelles nulles, on obtient, avec Stodola, les conditions de stabilité ordinaire, lesquelles, pour $\omega > \Omega$, exigent que I soit supérieur à une certaine limite. Au contraire l'instabilité ordinaire est caractérisée par quelques racines à partie réelle positive.

Il suit de là que l'introduction, dans un système stable ordinairement, de résistances *aussi petites qu'on veut* peut faire apparaître dans les racines des parties réelles positives ou négatives; l'introduction de résistances à la déformation seules donne toujours des parties réelles positives, donc l'ins-

tabilité (art. II), tandis que l'introduction simultanée de résistances à la déformation et d'une résistance de milieu, toutes petites, mais la seconde étant assez grande par rapport aux premières, peut donner des parties réelles négatives et maintenir la stabilité (art. V). Au contraire, à partir d'un système instable ordinairement, il faut des résistances finies pour faire disparaître les parties réelles positives et avec elles l'instabilité.

Une petite résistance de milieu se présente donc comme susceptible de rétablir une stabilité troublée par de petites résistances à la déformation, mais comme incapable de stabiliser un rotor qui ne vérifie pas sensiblement les conditions de stabilité ordinaire de Stodola.

IMMUNOLOGIE. — *Sur une théorie de la constitution des anticorps.* Note [1] de M. **H. Vincent.**

Dans une publication précédente sur le processus de neutralisation des toxines microbiennes par l'orthosalicylate de sodium, j'ai montré que la toxine tétanique et l'ion salicylique présentent réciproquement une affinité énergique, affinité telle que l'union ainsi formée est difficilement réversible et que la toxine fixe ou retient sur elle-même un excédent notable d'ions salicyliques, dépassant de beaucoup la proportion nécessaire pour la neutraliser [2].

Ce phénomène peut être figuré comme il suit. Soit un complexe formé par la toxine T et le salicylate de sodium S, Ce complexe biologiquement neutre (non toxique) sera représenté par un noyau (TS) autour duquel viendront se grouper les ions S', S'', S'''..., en excédent. Mais, par raison d'équilibre, les derniers seront éventuellement susceptibles de s'en détacher s'ils sont mis en présence de nouvelles micelles de toxine neuve qui les attirent, ce que démontrent mes précédentes expériences.

Le groupement moléculaire $(TS) + S' + S'' + S'''$... se *comporte donc comme une antitoxine artificielle*, puisqu'il est capable de neutraliser une certaine quantité de toxine nouvelle par ses éléments S', S'', S'''... retenus autour du noyau TS et disponibles.

---

(1) Séance du 3 novembre 1931.

(2) H. Vincent, *Nouvelles recherches sur les cryptotoxines. Le phénomène de sursaturation des toxines par l'ion salicylique* (*Comptes rendus*, 193, 1931, p. 620).

Or un certain nombre de propriétés communes rapprochent les cryptotoxines des antitoxines. Comme les cryptotoxines les antitoxines forment avec leur toxine une union très solide. Dans l'un et dans l'autre cas l'adsorption réciproque n'est pas immédiate, mais exige un certain temps d'adaptation ([1]). D'autre part l'abaissement à 4,7 du pH, qui dissocie le complexe toxine-salicylate de sodium, produit la même dissociation de la toxine et de l'antitoxine (Morgenroth, Willanen et Ascher, de Potter). Calmette et Massol ont montré qu'en milieu acide, l'alcool agit pareillement sur le complexe venin-sérum antivenimeux. En conséquence, *comme dans les cryptotoxines, la toxine unie à l'antitoxine et neutralisée par elle, n'est pas détruite, elle est dissimulée.*

Il existe d'ailleurs d'autres raisons de rapprochement entre les cryptotoxines et les antitoxines. De même que le mélange strictement neutre de toxine et d'antitoxine tétaniques peut déterminer le tétanos chez les animaux affaiblis par une infection ou une intoxication microbienne (E. Roux), de même j'ai constaté que l'injection d'une cryptotoxine tétanique parfaitement inoffensive pour les cobayes témoins peut être suivie de l'apparition du tétanos chez les cobayes ayant reçu, quelques jours auparavant, de la toxine typhoïdique ou colibacillaire.

La loi des proportions relatives s'applique à l'union de la toxine tétanique et du salicylate de sodium, comme elle le fait dans le phénomène d'adsorption de l'antitoxine par la toxine. Elle se justifie, en particulier, par l'expérience de la neutralisation de doses supplémentaires et successives de toxine par le groupement neutre $(TS) + S' + S'' + S'''\ldots +$ ([2]). Cette expérience peut être rapprochée de celle d'Ehrlich. Les résultats constatés sont parallèles.

A la simplicité relative de l'union que contracte l'acide salicylique avec la toxine s'oppose évidemment la complexité de la structure du groupement moléculaire antigène-anticorps; mais ceci n'exclut pas l'hypothèse d'une analogie d'effets. Il ne paraît pas douteux aujourd'hui, à la suite des travaux que j'ai précédemment mentionnés et de ceux de Calmette (1895) sur la dissociation par la chaleur du venin et de son antivenin, de ceux de Wassermann sur celle de la toxine pyocyanique et de son antitoxine, des recherches d'Ostromuislenski (1915), de Hertzfeld et Klinger (1917-1918),

---

([1]) H. VINCENT, *Sur les propriétés générales des mélanges de toxine et d'antitoxine* (*C. R. de la Soc. de Biol.*, **62**, 1907, p. 158).

([2]) H. VINCENT, *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 620.

de Boissevain (1922), de Stradvomysloff et Kostromine (1923), de F. Vlès (1924), que les agrégats moléculaires spécifiques qui constituent les anticorps, résultent de la combinaison de l'antigène lui-même avec les éléments neutralisants ou « anti », de nature encore inconnue, élaborés par l'organisme vivant. En d'autres termes, le radical toxine entre dans la composition de l'anticorps et lui imprime sa spécificité. D'ailleurs cette spécificité, subordonnée, avant tout, à la nature de l'antigène, résulte aussi de la constitution physico-chimique des molécules qui forment les anticorps et qui diffèrent pour chacun des antigènes. Si T représente la toxine et A l'antitoxine, T communique au complexe TA sa spécificité primitive, chaque toxine sollicitant, pour sa part, pendant la phase de quelques jours nécessaire à l'élaboration de l'immunité, la formation d'un anticorps ayant sa formule propre qui ne s'ajuste pas à celle d'une autre toxine ([1]).

Les conséquences pouvant résulter des rapports constatés entre la toxine et l'acide salicylique dépassent donc, peut-être, le cadre de ces expériences. On peut se demander, en particulier, si, dans le complexe TA de toxine-antitoxine, ce groupement moléculaire fondamental ne se comporte pas comme le fait le complexe $(TS) + S' + S'' + S'''$.... C'est-à-dire qu'à chaque noyau de (TA) s'adjoindraient en surnombre des éléments anticorps A', A'', A'''..., très avides de la même toxine. Ces éléments prêts à se renouveler et à s'augmenter *in vivo* (saignée, inoculations réitérées), demeurent disponibles dans le sang ([2]) et capables, comme le fait le complexe toxine-salicylate de sodium, de fixer, puis de neutraliser une quantité nouvelle de toxine.

Dans cette conception l'antigène fait spécifiquement partie constituante de l'anticorps. Plus l'organisme recevra d'antigène, plus il se formera de molécules $(TA) + A' + A'' + A'''$.... Chaque agrégat de cette nature réalise un champ de forces et un véritable accumulateur d'énergie antitoxique,

---

([1]) Les anticorps spécifiques et, plus spécialement, les antitoxines ne sont pas entièrement préformés *in vivo* puisque la première introduction d'une toxine n'est pas suivie de la production immédiate de son antitoxine. Ils semblent cependant se constituer par l'organisation et le groupement d'éléments normaux, à caractère colloïdal fondamental.

([2]) On s'explique en particulier pourquoi l'injection excessive ou trop rapprochée de toxine, chez l'animal en immunisation, abaisse momentanément le taux préexistant d'anticorps; inversement, pourquoi, chez un animal immunisé, le sang renferme une proportion d'antitoxine considérablement supérieure à celle qui correspondrait à la neutralisation de la toxine totale reçue.

capable d'exercer sur les micelles toxiques nouvelles avec lesquelles il entre ou peut entrer en contact, une attraction moléculaire élective, puis une neutralisation active.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur les inductances mutuelles de fuites magnétiques dans les transformateurs à plusieurs secondaires.* Note [1] de M. **André Blondel**.

Pour les transformateurs ordinaires, on a introduit comme on le sait, en dehors des inductances propres et mutuelles L_1, L_2, M, considérées par Maxwell dans sa théorie des transformateurs, des inductances de fuites magnétiques l_1 et l_2 respectivement au primaire et au secondaire. En général on ne les considère que sous forme d'une inductance totale de fuites l_f rapportées au circuit primaire et qui est égale à σL_1 comme je l'ai montré pour le cas plus général des moteurs d'induction à l'arrêt. Ce coefficient l_f se déduit de l'essai classique en court circuit du secondaire en mesurant le courant primaire sous tension réduite.

Théoriquement on peut mesurer séparément l_1 et l_2 au moyen d'essais à vide. Par exemple, on peut connaître l_1, en déterminant la tension U_2 du circuit secondaire ouvert, tandis que le primaire est alimenté sous une tension U_1 et en mesurant le courant d'excitation I_0 et son angle de décalage de phase α, on a sensiblement, en introduisant le rapport des nombres de spires $\frac{n_1}{n_2}$,

$$U_1 - \frac{n_1}{n_2} U_2 = r_1 I_0 \cos\alpha + \omega l_1 I_0 \sin\alpha.$$

D'où

$$\omega l_1 = \frac{U_1 - \frac{n_1}{n_2} U_2 - r_1 I_0 \cos\alpha}{I_0 \sin\alpha}.$$

On a d'autre part (en négligeant la question de phase)

$$\omega M = \frac{U_2}{I_0}.$$

On déterminerait de même l_2. Mais la différence $U_1 - m U_2$ étant très petite, la précision de telles mesures est faible.

Si l'on considère maintenant le cas où le transformateur possède plusieurs

[1] Séance du 19 octobre 1931.

secondaires, par exemple un circuit 2 et un circuit 3, les définitions précédentes deviennent insuffisantes, et il faut ajouter la considération d'inductances mutuelles de fuites, dont l'existence est mise en évidence par la présence d'une force électromotrice E aux bornes d'un des circuits secondaires (3) laissé ouvert pendant que l'autre (2) est en court circuit. Si l'on appelle n_1, n_2, n_3 les nombres de spires des trois enroulements r_1, r_2, r_3 leurs résistances, on peut considérer les impédances vectorielles globales

$$\overline{Z}_{12} = r_1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 r_2 + j\omega\left[l_1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 l_2\right] = Z_{12}\underline{|\gamma_2}$$

$$\overline{Z}_{13} = r_2 + \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^2 r_3 + j\omega\left[l_2 + \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^2 l_3\right] = Z_{13}\underline{|\gamma_3}$$

elles déterminent l'intensité et la phase des courants I_{c2} ou I_{c3} produits au primaire par le court circuit du circuit (2) ou (3) respectivement. Dans le premier cas, on mesurera aux bornes de (3) une force électromotrice

$$E_3 = j\omega m_3 \dot{I}_{c2}$$

et dans le second cas, on obtiendra aux bornes de (2) une force électromotrice $\overline{E}_2 = j\omega m_3 I_{c3}$. Cela permet de connaître m_3 et m_2 que nous appelons inductances mutuelles de fuites.

Si les deux circuits secondaires sont disposés symétriquement, $m_2 = m_3$.

Quand un tel transformateur alimenté sous la tension normale $\overline{U}_2$ fournit des courants secondaires respectivement égaux à

$$\overline{I}_2 = I_2\underline{|-\varphi_2} \quad \text{et} \quad \overline{I}_3 = I_3\underline{|-\varphi_3},$$

on calculera aisément les chutes de tension aux bornes de (2) et (3) au moyen des coefficients définis et mesurés comme on vient de l'expliquer; car

$$(\overline{U}_2)_0 - \overline{U}_2 = \overline{Z}_{12}\overline{I}_2 + j\omega m_3 \overline{I}_3,$$
$$(U_3)_0 - U_3 = Z_{13} I_3 + j\omega m_2 I_2.$$

On en déduit le rapport

$$\frac{U_2}{(U_2)_0} = 1 - \overline{Z}_{12} I_2 - j\omega m_3 I_3,$$

et un rapport analogue pour $\frac{U_3}{(U_3)_0}$.

Ces rapports se lisent directement sur l'abaque des chutes de tension signalée dans ma dernière Note [1], en portant à partir de l'origine succes-

---

[1] *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 556.

sivement un vecteur $\frac{Z_{12} I_2}{(U_2)_0}$ faisant en avant de I_2 l'angle γ_2 puis un vecteur $\frac{\omega m_3 I_3}{(U_2)_0}$ décalé de $\frac{\pi}{2}$ en avant de I_3.

Si l'on appelle $(E_1)_0$ la force électromotrice primaire induite en circuit ouvert, et qu'on pose $\bar{k} = \frac{(E_1)_0}{U_1}$ les tensions aux bornes des circuits (2) et (3) ouverts sont respectivement

$$(U_2)_0 = \frac{n_2}{n_1} \frac{U_1}{\bar{k}} \quad \text{et} \quad (U_3)_0 = \frac{n_3}{n_1} \frac{U_1}{\bar{k}},$$

et les courants primaires équivalents à I_2 et I_3 sont respectivement de même

$$J_2 = \frac{n_2}{n_1} \bar{k} I_2 \quad \text{et} \quad J_3 = \frac{n_3}{n_1} \bar{k} I_3.$$

Ces expressions sont vectorielles, on a $\bar{k} = 1 + Z_1 \bar{Y}$ en appelant Y l'admittance du primaire $\bar{Y} = Y \lfloor -\beta$, et l'argument de $\bar{k}$ est toujours assez faible pour être négligé, ce qui permet de remplacer $\bar{k}$ par son module k facile à calculer ou à mesurer, $\left(k = \frac{n_2}{n_1} \frac{U_1}{(U_2)_0} \right)$.

Le courant primaire total s'obtient donc en faisant la résultante des trois courants $Y U_1 \lfloor -\beta$; $J_2 \lfloor -\varphi_2$; $J_3 \lfloor -\varphi_3$.

On peut traiter de la même manière le problème d'un transformateur à n secondaires, en ajoutant vectoriellement pour chacun d'eux la chute de tension propre et les forces électromotrices induites par les fuites mutuelles des autres enroulements.

M. F. **Mesnil**, en présentant les deux volumes des *Comptes rendus du IIe Congrès international du Paludisme*, qui s'est tenu à Alger en mars 1930, s'exprime en ces termes :

L'Algérie a été choisie comme siège de ce Congrès (le premier s'est tenu à Rome en 1925) en raison du centenaire de l'établissement des Français (qui y ont tant souffert du paludisme) et aussi du cinquantième anniversaire de la découverte faite à Constantine par notre illustre confrère **A. Laveran** des hématozoaires des fièvres palustres. Le Congrès, présidé par mon collègue de l'Institut Pasteur E. Marchoux, membre de l'Aca-

démie de Médecine, a été suivi d'une instructive excursion dans la Mitidja où, depuis plus d'un quart de siècle, Edmond Sergent, Correspondant de l'Académie, et Étienne Sergent montrent comment il convient de lutter contre le paludisme.

Le Congrès terminé, une partie des congressistes se sont rendus à Constantine où a été évoquée, dans l'hôpital même où elle fut faite, la grande découverte de l'hématozoaire du paludisme, puis au village dénommé Laveran, sur la route de Batna à Timgad, où fut inauguré un monument encastrant le médaillon de notre confrère. J'ai eu l'honneur de présider ces cérémonies, où je représentais l'Académie.

Les secrétaires généraux du Congrès, les D[rs] Parrot et Catanéi, de l'Institut Pasteur d'Algérie, ont assumé la lourde charge de réunir tous les actes du Congrès dans les deux volumes édités à Alger que je présente : on trouvera à la fin du Tome II les discours prononcés à Constantine et au village de Laveran.

M. **Emm. de Margerie** présente la première livraison de l'*Atlas de France*, entrepris sous les auspices du Comité National de Géographie que préside M. **R. Bourgeois**, et avec le concours du Service Géographique de l'Armée et de la Société Française de Cartographie.

Ce fascicule-spécimen a été offert à tous les membres du Congrès International de Géographie qui vient de se tenir à Paris, du 16 au 24 septembre. Il renferme trois planches, destinées à mettre en évidence le caractère de la collection, pour laquelle une centaine de feuilles sont prévues :

Relief du sol. Feuille Sud-Ouest ($\frac{1}{1\,250\,000}$);
Densité de la population. Feuille Sud-Ouest ($\frac{1}{1\,250\,000}$);
Richesses minérales ($\frac{1}{2\,500\,000}$).

Ces trois cartes, imprimées en couleurs avec le plus grand soin, ont été établies d'après les minutes de MM. de Martonne, Demangeon et Cholley, professeurs à l'Université de Paris, Robert Perret, docteur ès lettres, et Jean Majorelle, ingénieur.

ÉLECTIONS.

Par l'unanimité de 43 suffrages, MM. **H. Le Chatelier** et **G. Urbain** sont réélus membres de la *Commission de contrôle de la circulation monétaire*.

CORRESPONDANCE.

Le **Secrétaire général du Fifth Pacific Science Congress**, qui devait avoir lieu en mai 1932, fait savoir que, en raison des conditions difficiles de l'heure présente, ce Congrès est reporté à l'année suivante; sa date sera fixée ultérieurement.

M. **M. Fontaine** adresse un Rapport relatif à l'emploi de la subvention accordée sur la *Fondation Loutreuil* en 1930.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° L. Potin. *Formules et Tables numériques concernant les Opérations financières. Le calcul numérique. Conseils sur l'art du calculateur.* (Présenté par M. M. d'Ocagne.)

2° Jean Albert-Weil. *Les Poisons du bacille tuberculeux et les réactions cellulaires et humorales dans la Tuberculose. Esquisse d'une conception nouvelle des processus pathogéniques de la Tuberculose.* (Présenté par M. F. Mesnil.)

ARITHMÉTIQUE. — *Sur la distribution des entiers qui ne sont divisibles par aucun parmi les n plus petits nombres premiers.* Note de M. **Erik Westzynthius**, présentée par M. Hadamard.

1. Legendre [1] a énoncé un théorème qui, avec quelques changements de notation, peut être formulé ainsi :

---

[1] *Essai sur la théorie des nombres*, 2e édition, p. [illegible] (Paris 1808).

Soient $p_1, p_2, p_3, \ldots$ les nombres premiers dans leur ordre naturel et ψ_1, $\psi_2, \ldots, \psi_n$ des nombres premiers impairs choisis à volonté, et considérons d'autre part une série arithmétique $a + \mu b\,(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ où les entiers a et b sont premiers entre eux. Si dans cette série on prend p_n termes consécutifs quelconques, il y en aura toujours parmi ces termes au moins un qui ne sera divisible par aucun des nombres $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

En admettant que le nombre 2 puisse aussi se trouver parmi les nombres premiers donnés $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, le théorème de Legendre prend cette forme :

Parmi $2p_{n-1}$ termes consécutifs de la série $a + \mu b$ il y en aura toujours au moins un qui n'est pas divisible par aucun parmi n nombres premiers choisis à volonté.

2. Le théorème de Legendre cependant n'est pas exact, comme le fit remarquer le premier A. Dupré dans un travail présenté à l'Académie des Sciences en 1858, à l'occasion d'une question mise au concours par l'Académie. Plus tard C. Moreau et A. Piltz ont constaté le même fait par des exemples numériques. Et tout récemment MM. A. Brauer et H. Zeitz [1] ont prouvé par un raisonnement rigoureux que le théorème en question est en défaut dès que n dépasse une certaine limite, en faisant voir que, pour $n \geqq 14$ ($p_n \geqq 43$) il existe toujours au moins $2p_{n-1} + 1$ entiers consécutifs dont chacun est divisible par quelqu'un des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Et poussant leurs recherches plus loin, les auteurs cités ont abouti à ce résultat plus précis que, à tout nombre positif donné ε, il correspond un entier n_ε tel que, pour $n \geqq n_\varepsilon$, il y en a au moins

$$(4 - \varepsilon)\,p_n$$

entiers consécutifs jouissant de la propriété énoncée.

3. Indépendamment de ces auteurs, nous avions été amené de notre côté à nous occuper de la question dont il s'agit. Il résulte de nos recherches que, dans le résultat cité ci-dessus de MM. Brauer et Zeitz, le nombre 4 peut être remplacé par un nombre aussi grand qu'on voudra. De plus nous avons établi le théorème suivant, qui paraît être le résultat le plus précis que permet d'atteindre la méthode assez élémentaire dont nous nous sommes servi (C désigne la constante d'Euler) :

A tout nombre positif ε il correspond un entier positif n_ε tel que, dès

---

(1) *Ueber eine zahlentheoretische Behauptung von Legendre* (*Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, 29, 1930, p. 116).

que $n \geqq n_\varepsilon$, il y a au moins

$$(2-\varepsilon)e^{C}\frac{\log\log p_n}{\log\log\log p_n}p_n$$

entiers consécutifs dont chacun est divisible par quelqu'un des nombres p_1, p_2, ..., p_n.

Il s'ensuit ce corollaire :

Quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, l'inégalité

$$p_{n+1}-p_n>(2-\varepsilon)e^{C}\frac{\log\log\log p_n}{\log\log\log\log p_n}\log p_n$$

sera vérifiée pour une infinité de valeurs de n.

GÉOMÉTRIE. — *Sur diverses extensions de la notion de continu d'ordre borné.* Note [1] de M. A. **Marchaud**, présentée par M. Hadamard.

I. J'ai appelé continu d'ordre borné tout continu (borné) de l'espace euclidien à n dimensions rencontré en un nombre borné de points par toute multiplicité linéaire à $n-1$ dimensions. Un tel continu est nécessairement une courbe [2]. Cette conclusion subsiste si l'on fait sur le continu des hypothèses de même nature que la précédente, mais beaucoup moins restrictives.

Nous considérerons ici des continus bornés ou non de l'*espace euclidien projectif* à n dimensions.

Appelons *faisceau d'arête* ω un système de multiplicités linéaires à $n-1$ dimensions, ayant en commun la multiplicité linéaire à $n-2$ dimensions ω, à distance finie ou non. Un faisceau est *complet* s'il contient tout point de l'espace. L'expression faisceau *partout dense* s'entend d'elle-même.

On dira qu'un ensemble est d'*ordre borné*, d'ordre *fini* ou d'ordre *punctiforme* par rapport à un faisceau, si la section de l'ensemble par chaque multiplicité (à $n-1$ dimensions) du faisceau contient un nombre borné ou fini de points, ou bien est un ensemble punctiforme, c'est-à-dire ne renfermant aucun continu.

Ceci posé, on peut établir les propositions suivantes :

---

(1) Séance du 3 novembre 1931.

(2) A. Marchaud, *Sur les continus d'ordre borné* (*Comptes rendus*, 189, 1929, p. 16).

1. *Un continu d'ordre punctiforme par rapport à un faisceau complet est une courbe cantorienne* (¹) (au sens de P. Urysohn).

2. *Si, de plus, le continu est d'ordre fini par rapport à un faisceau partout dense de même arête, c'est aussi une courbe de Jordan.*

3. *Un continu d'ordre fini par rapport à un faisceau complet est décomposable en une infinité dénombrable d'arcs simples tels que deux quelconques d'entre eux aient au plus un point commun, extrémité pour chacun d'eux, laquelle ne peut appartenir à un troisième.*

4. *Si un continu d'ordre borné par rapport à un faisceau complet n'a pas de point sur l'arête et possède seulement un nombre fini de points de ramification, il est la somme d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant deux à deux en commun que des extrémités.*

Dans les trois derniers cas le continu se réduit à une courbe simple, s'il ne possède aucun point de ramification. (Un point O est dit point de ramification d'un continu, si l'on peut trouver sur lui trois arcs simples n'ayant deux à deux en commun que O.)

Il s'agit ici de courbes de Jordan, courbes simples, arcs simples *projectifs*. D'autre part les considérations de P. Urysohn s'étendent aisément aux points à l'infini de l'espace projectif.

J'avais obtenu des propositions analogues aux deux dernières en supposant le continu borné et d'ordre borné par rapport à n directions, c'est-à-dire, avec le langage adopté ici, d'ordre borné par rapport à n faisceaux complets dont les arêtes sont à l'infini sur les faces d'un n-èdre (système de n multiplicités linéaires à $n-1$ dimensions ayant un seul point commun, et à distance finie). Dans ce cas les arcs qui interviennent sont rectifiables. Il est bien évident qu'on ne peut aboutir à une telle conclusion en faisant des hypothèses sur un seul faisceau.

II. Pour obtenir des propriétés différentielles, il faut faire intervenir n faisceaux. Par exemple, pour $n=2$, un arc simple d'ordre fini par rapport à deux faisceaux complets possède une tangente *quasi partout*. Avant d'énoncer le théorème, qui généralise ce résultat pour n quelconque, précisons le sens de l'expression « quasi partout ».

Soit $\widehat{AB}$ un arc simple, image biunivoque et bicontinue d'un segment $\overline{ab}$. Je dirai qu'un ensemble de AB est de *mesure absolument nulle*, si son image sur $\overline{ab}$ a une mesure nulle quelle que soit la correspondance. Il serait inté-

(¹) Si $n=2$, il suffit que le faisceau soit partout dense. Pour $n>2$ un continu d'ordre punctiforme par rapport à un faisceau partout dense peut contenir des surfaces.

ressant de déterminer la structure de ces ensembles. On montre aisément qu'un ensemble de mesure absolument nulle ne contient aucun sous-ensemble parfait, il est donc dénombrable s'il est fermé. (Comme exemple on peut citer l'ensemble des points où un arc rectifiable n'a pas de tangente.)

Lorsqu'une propriété est vérifiée en tout point d'un arc simple, sauf peut-être sur un ensemble de mesure absolument nulle, on dira qu'elle est satisfaite *quasi partout*.

Ce point précisé, considérons n multiplicités linéaires à $n-2$ dimensions, $\omega_1, \ldots, \omega_n$. L'ensemble des droites s'appuyant sur elles toutes est en général une multiplicité algébrique, de degré $n-1$, à $n-1$ dimensions, que je désignerai par $[\omega_i]$. Dans certains cas exceptionnels, que nous écarterons, l'ensemble précédent contient tout l'espace. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème général annoncé.

5. *Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, n multiplicités linéaires à $n-1$ dimensions, à distance finie ou non, telles que le lieu des droites s'appuyant sur elles toutes soit une multiplicité à $n-1$ dimensions $[\omega_i]$ et $\widehat{AB}$ un arc simple (projectif) d'ordre fini par rapport aux faisceaux complets d'arêtes ω_i, et sans point sur $[\omega_i]$.*

1° *$\widehat{AB}$ possède une tangente quasi partout (si l'ensemble des points où la tangente n'existe pas est fermé, il est dénombrable)* :

2° *Tout arc partiel de $\widehat{AB}$, à distance finie, contient un arc rectifiable et peut être remplacé par un arc simple rectifiable coïncidant avec lui, sauf peut-être sur une infinité dénombrable d'arcs partiels ouverts n'empiétant pas, dont les images, dans une correspondance arbitrairement donnée, ont une somme aussi petite qu'on veut ;*

3° *Si $\widehat{AB}$ est d'ordre borné par rapport aux faisceaux, toute partie de l'arc à distance finie est rectifiable.*

Lorsque $[\omega_i]$ se décompose en n multiplicités linéaires, l'arc possède une tangente quasi partout, même s'il a des points sur $[\omega_i]$. Ceci a toujours lieu pour $n=2$, car dans ce cas $[\omega_i]$ est une droite.

Un cas particulier du théorème précédent s'énonce ainsi :

6. *Une fonction continue $f(x)$, qui prend chacune de ses valeurs seulement un nombre fini de fois, possède une tangente quasi partout. On peut la modifier sur un ensemble ouvert de mesure aussi petite qu'on veut, de manière à obtenir une fonction continue à variation bornée.*

GÉOMÉTRIE. — *Sur une proposition de Minkowski.*
Note [1] de M. J. **Favard**, présentée par M. Hadamard.

Soient V_{111}, V_{112}, V_{122}, V_{222} les volumes et les volumes mixtes de deux corps convexes C_1 et C_2, de sorte que le volume du corps

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 \qquad (x_1 + x_2 = 1,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0)$$

de la série linéaire qu'ils engendrent soit

$$x_1^3 V_{111} + 3x_1^2 x_2 V_{112} + 3x_1 x_2^2 V_{122} + x_2^3 V_{222}.$$

Minkowski [2] a démontré que

$$V_{112}^2 \geqq V_{111} V_{122}, \tag{1}$$

$$V_{122}^2 \geqq V_{112} V_{222}. \tag{2}$$

Il a indiqué dans quels cas l'une des inégalités précédentes devient une égalité, mais les renseignements qu'il donne n'ont pas permis jusqu'ici de parfaire la démonstration. M'écartant de la voie suggérée par lui, j'ai pu parvenir au résultat dans le cas où les corps C_1 et C_2 sont tous les deux des polyèdres :

Pour que l'égalité (1) *ait lieu, il faut et il suffit que* C_1 *soit homothétique à* C_2 *ou à un corps de capuchon de* C_2.

Dans le cas général, j'ai pu montrer que, si

$$V_{111} = V_{112} = V_{122}, \tag{3}$$

en désignant par V_{123} le volume mixte de C_1 et de C_2 avec un corps convexe quelconque C_3, on a

$$V_{112} = V_{123},$$

ce qui entraîne

$$dS_{11} = dS_{12},$$

où dS_{11} désigne l'élément d'aire de la frontière de C_1 et dS_{12} l'élément correspondant de l'aire mixte de C_1 et C_2.

Dans le cas où C_1 et C_2 sont deux polyèdres je commence par démontrer que, si à chaque face de C_2 correspond une face ou une arête parallèle de C_1, il est nécessaire, pour que les égalités (3) aient lieu, que C_1 et C_2 soient superposables par translation. Je montre ensuite que, à tout

---

[1] Séance du 3 novembre 1931.

[2] Minkowski, *Œuvres*, 2, p. 258 et suiv.

polyèdre C_1, doit correspondre un corps de capuchon de C_2 dont les faces ou les arêtes sont parallèles aux faces de C_1.

Dans le cas où le corps C_2 est dégénéré en un disque convexe plan, le théorème de Minkowski fournit le résultat suivant, que l'on peut obtenir simplement par l'analyse :

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle $x (0 \leqq x \leqq 1)$ non convexe et non négative, on a

$$\frac{3}{4}\int_0^1 f^2(x)\,dx \leqq \left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que pour les fonctions $f(x)$ telles que la courbe $y = f(x)$ soit composée de deux segments joignant les points 0 et 1 ou pour les fonctions limites de celles-ci :

$$y = ax \quad \text{et} \quad y = a(1 - x) \quad (a > 0).$$

On peut démontrer aussi que, quel que soit $p > 1$, on a

$$\frac{p+1}{2^p}\int_0^1 f^p(x)\,dx \leqq \left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^p.$$

le signe d'égalité ayant lieu dans les mêmes conditions que ci-dessous :

Plus généralement soit $\varphi(t)$ une fonction non concave positive, intégrale d'une fonction monotone non décroissante, définie pour $0 \leqq m \leqq t \leqq M$; supposons que les fonctions non convexes $f(x)$ soient telles que $m \leqq f(x) \leqq M$, alors il existe un nombre $k (< 1)$ tel que

$$k\int_0^1 \varphi[f(x)]\,dx \leqq \varphi\left[\int_0^1 f(x)\,dx\right].$$

Revenant aux corps convexes et supposant maintenant que C_3 est un corps bien déterminé, Minkowski a montré que

$$(4) \qquad V_{123}^2 \geqq V_{113} V_{223}.$$

J'ai pu améliorer cette inégalité : en désignant par σ_{ij} l'aire mixte des contours apparents de C_i et de C_j sur un plan perpendiculaire à une direction commune mais quelconque de projection, on a

$$V_{113}\sigma_{23}^2 - 2V_{123}\sigma_{23}\sigma_{13} + V_{223}\sigma_{13}^2 \leqq 0.$$

En particulier, en prenant pour C_3 une sphère et en désignant par S_{11} et S_{22} les aires des deux corps C_1 et C_2, par S_{12} leur aire mixte et par λ_1 et λ_2

les longueurs des contours apparents, on a

$$S_{11}\lambda_2^2 - 2S_{12}\lambda_2\lambda_1 + S_{22}\lambda_1^2 \leq 0.$$

Le signe d'égalité n'a lieu dans (4) que si

$$\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}} = \frac{V_{123}}{V_{223}} = \frac{V_{113}}{V_{123}} = \frac{V_{133}}{V_{233}} = \frac{V_{134}}{V_{234}},$$

en désignant par C_4 un corps quelconque; comme plus haut cette égalité entraîne que le rapport $\frac{dS_{13}}{dS_{23}}$ est constant.

La condition géométrique d'égalité paraît ici difficile à énoncer dans le cas général car, si C_3 se réduit à un segment de droite, l'égalité exprime seulement que les deux corps C_1 et C_2 ont des contours apparents homothétiques dans la direction du segment C_3.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Congruences paraboliques stratifiables ; transformations des surfaces* R_0. Note [1] de M. **S. Finikoff.**

1. Deux congruences C et C_1 forment un *couple stratifiable* [2] si chacun de leurs rayons porte les points de ∞^1 surfaces Σ dont les plans tangents passent par le rayon correspondant de la seconde. J'ai examiné les congruences stratifiables à foyers distincts (*Comptes rendus*, 185, 1927, p. 376; *Rendiconti di Palermo*, 53, 1929, p. 313); *j'étudie ici les couples contenant des congruences paraboliques.*

2. La première congruence C est engendrée par les tangentes aux asymptotiques $v =$ const. de la surface (x), rapportée à son réseau asymptotique et déterminée par le système

$$x_{uu} = \beta x_v + p x, \quad x_{vv} = \gamma x_u + q x.$$

Le rayon homologue de C_1 est déterminé par les points (y) et (z),

$$y = \xi x + \eta x_u + x_v, \quad z = \zeta x + \theta x_u + x_{uv}.$$

Les fonctions ξ, η, ζ, θ sont solutions du système

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_u = \xi\eta\beta - \eta p + \zeta, & \xi_v = \xi^2 + \eta\zeta - q + m, \\ \eta_u = \eta^2\beta - \xi + \theta, & \eta_v = \eta(\xi + \theta) - \gamma, \\ \zeta_u = \xi\theta\beta + \xi(\beta_v + p) - \theta p - \beta q - p_v + \beta m, & \zeta_v = \xi\zeta + \xi\beta\gamma + \zeta\theta - \gamma p - q_u, \\ \theta_u = -\zeta + \eta\theta\beta + \eta(\beta_v + p) - \beta\gamma, & \theta_v = \eta\zeta + \eta\beta\gamma + \theta^2 - \gamma_u - q + m, \end{cases}$$

(1) Séance du 3 novembre 1931.

(2) G. Fubini, *Annali di Matematica*, 4e série, 1, 1924, p. 241.

Si m est constant et si $(\log\beta)_{uv} = 0$, le système (1) est complètement intégrable et détermine la seconde congruence avec 5 constantes arbitraires (y compris m).

3. *La condition* $(\log\beta)_{uv} = 0$ *caractérise les surfaces* R_0 *qui forment avec les surfaces* R *de MM. Tzitzéica, Demoulin la classe des surfaces projectivement déformables.* La congruence C_1 est engendrée par les tangentes asymptotiques ($v =$ const.) de la surface (y) qui est aussi surface R_0 et correspond à la surface (x) par ses asymptotiques. *Les surfaces* (x), (y) *sont donc focales d'une congruence* K (*évidemment* W) *caractérisée par ce fait que le coefficient* β *de l'élément linéaire projectif de M. Fubini de l'une des focales est égal au coefficient homologue de la seconde.* Le système (1) détermine donc une transformation asymptotique des surfaces R_0.

4. Deux transformations (1) à constantes *m différentes* étant effectuées, il existe une seule surface (y') déduite par une transformation (1) soit de la première transformée (y_1), soit de la seconde (y_2). Si les constantes m sont *égales*, parmi les surfaces R_0 transformées de (y_1), aucune ne coïncide avec une surface R_0 transformée de (y_2), à moins que l'équation

$$(2) \qquad (\xi_1 - \xi_2)(\theta_1 - \theta_2) - (\zeta_1 - \zeta_2)(\eta_1 - \eta_2) = 0$$

ne soit vérifiée, *auquel cas il y en a une infinité*. Nous désignerons par les indices inférieurs 1 et 2 les quantités correspondant aux points (y_1) et (y_2). L'équation (2) montre que les tangentes asymptotiques $v =$ const. des surfaces (y_1) et (y_2) ont le point commun $t = (\eta_2 - \eta_1)z_1 - (\theta_2 - \theta_1)y_1$.

5. *Quelle que soit la surface transformée* (y), *il en existe une infinité à deux paramètres dont les tangentes asymptotiques* ($v =$ const.) *ont un point commun* (t); *les* ∞^2 *surfaces obtenues pour une même valeur de m se répartissent en* ∞^1 *faisceaux.* Les points homologues des surfaces d'un faisceau sont situés sur une droite (wy) dont le foyer unique est le point (w) où elle coupe la tangente asymptotique (xx_u). La droite (wy) touche sur la surface (w) l'asymptotique $v =$ const. Toutes les surfaces (w) sont les surfaces R_0 qui correspondent à la surface (x) par asymptotiques; elles sont aussi les surfaces Σ qui stratifient le couple (xx_u), (yy_u). La congruence (wy) forme un couple stratifiable parabolique avec la congruence (xy') dont les rayons touchent les asymptotiques $v =$ const. de la surface (t).

6. *Les quatre surfaces* (x), (w), (y), (t) *déterminent un quadrilatère gauche mobile dont les sommets décrivent ces surfaces, tandis que les arêtes touchent les asymptotiques* $v =$ const. Les arêtes opposées engendrent des

couples stratifiables paraboliques, les diagonales engendrent des congruences K dont les nappes focales sont les surfaces en jeu.

7. Si les tangentes des asymptotiques $u = \text{const.}$ des deux surfaces (x) et (y) forment également un couple stratifiable, les deux coefficients β et γ de l'élément linéaire projectif de chaque surface sont égaux aux homologues de l'autre et les surfaces sont projectivement applicables. La congruence (xy) appartient donc à la classe que j'ai examinée dans la Note du 18 mai 1931 (*Comptes rendus*, 192, 1931, p. 1175).

ALGÈBRE. — *Nouvelle démonstration du théorème d'existence en théorie du corps de classes.* Note [1] de MM. **J. Herbrand** et **C. Chevalley**, présentée par M. Hadamard.

Nous nous proposons d'exposer le principe d'une nouvelle démonstration du théorème d'existence des corps de classes (dans le cas où le corps de base contient les racines l-ièmes de l'unité, et pour les sur-corps de degré l).

Soit k un corps de nombres algébriques contenant les racines l-ièmes de l'unité, l désignant un nombre premier. On désignera par K (affecté au besoin d'indices) des sur-corps relativement cycliques de degré l de k. On sait que :

Un corps K est corps de classes pour un groupe d'idéaux H de k dont le conducteur $\mathfrak{f}_{Kk}$ jouit des propriétés suivantes :

1° Ses facteurs premiers finis sont des idéaux ramifiés dans K ;

2° Les idéaux $\mathfrak{p}$ premiers à l qui le divisent y apparaissent avec l'exposant 1 ;

3° Les idéaux $\mathfrak{l}$ diviseurs de l qui divisent $\mathfrak{f}_{Kk}$ y apparaissent avec un exposant $\leq le_0 + 1$ [2].

Nous désignerons par $\mathfrak{m}$ (affecté au besoin d'indices) des idéaux tels que :

1° Les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ qui divisent $\mathfrak{m}$ y apparaissent avec l'exposant 1 :

2° Les idéaux $\mathfrak{l}$ qui divisent $\mathfrak{m}$ y apparaissent avec l'exposant $e_0 l + 1$.

Nous dirons que deux idéaux $\mathfrak{m}$ sont complémentaires quand ils sont premiers entre eux et que tout idéal $\mathfrak{l}$ ainsi que tout idéal premier infini divisent au moins l'un d'eux.

$\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ désignant deux idéaux complémentaires, désignons :

---

[1] Séance du 3 novembre 1931.

[2] Pour un idéal $\mathfrak{l}$ qui intervient dans l avec l'exposant e on pose $e = e_0(l - 1)$.

Par l^{r_1} le nombre des corps K tels que : 1° $\mathfrak{f}_{Kk}$ divise $\mathfrak{m}_1$; 2° les facteurs premiers de $\mathfrak{m}_2$ se décomposent dans K en idéaux premiers distincts du premier degré.

Par l^{s_1} le nombre des groupes d'idéaux H d'index l de k tels que : 1° H est définissable (mod $\mathfrak{m}_1$); 2° H contient les facteurs premiers de $\mathfrak{m}_2$.

Désignons par l^{r_2} et par l^{s_2} les nombres définis de la même manière que les précédents, mais en intervertissant les indices 1 et 2. On constate par certaines transformations de calcul que

$$r_1 - s_1 = s_2 - r_2. \tag{1}$$

Or il résulte du théorème réciproque que le premier membre est $\leqq 0$ et le second $\geqq 0$. Il en résulte que les deux membres sont nuls et par suite $r_1 = s_1$.

Soit alors donné un groupe d'idéaux quelconque H d'indice l, et dans ce groupe divers idéaux premiers $\mathfrak{p}$. Du théorème précédent résulte qu'il existe un corps de classe K pour H, dans lequel les idéaux $\mathfrak{p}$ se décomposent en idéaux premiers distincts du premier degré (il suffit de choisir deux idéaux $\mathfrak{m}$ complémentaires dont l'un est divisible par le conducteur de H et dont l'autre contient les idéaux $\mathfrak{p}$).

On démontre donc en même temps que le théorème d'existence, le théorème de décomposition des idéaux premiers du sous-corps qui exigeait dans la théorie de Takagi-Hasse une démonstration spéciale avec des idéaux auxiliaires.

Il faut encore établir que tous les idéaux premiers du discriminant divisent le conducteur. Pour les idéaux premiers à l, cela résulte tout de suite de la démonstration. Soit alors un groupe H de conducteur $\mathfrak{f}$. Soient $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_{n_1}$ les idéaux $\mathfrak{l}$ contenus dans H ; $\mathfrak{l}_{n_1+1}, \ldots, \mathfrak{l}_{n_2}$ les idéaux $\mathfrak{l}$ divisant $\mathfrak{f}$; $\mathfrak{l}_{n_2+1}, \ldots, \mathfrak{l}_n$ les autres idéaux $\mathfrak{l}$. Soit $\mathfrak{f}$ le plus petit idéal de la catégorie des idéaux $\mathfrak{m}$ divisible par $\mathfrak{f}$ et contenant les idéaux $\mathfrak{l}_{n_2+1}, \ldots, \mathfrak{l}_n$. Le groupe H est définissable (mod $\mathfrak{f}$), et contient tous les idéaux $\mathfrak{l}$ qui ne figurent pas dans $\mathfrak{f}$. Donc il lui correspond un corps de classe K tel que le groupe associé à K (mod $\mathfrak{f}$) soit H. Donc le groupe associé à K (mod $\mathfrak{f}$) est H. Supposons que $\mathfrak{l}_{n_2+2}$ se ramifie dans K : on aurait $\mathfrak{l}_{n_2+1} = N_{Kk}(\mathfrak{L})$, donc $\mathfrak{l}_{n_2+1}$ serait dans H, ce qui n'est pas.

Les auteurs ont trouvé simultanément et indépendamment le principe de la méthode précédente. Les calculs conduisant aux égalités (1) ont été menés par eux de manière différente. Ces calculs seront publiés ultérieurement.

CALCUL INTÉGRAL. — *Méthode d'intégration par arcs successifs permettant d'obtenir simplement, dans le calcul de l'arc élémentaire, une approximation aussi élevée qu'on le désire.* Note [1] de M. **H. Parodi**, présentée par M. d'Ocagne.

Les méthodes classiques d'intégration par arcs successifs permettent d'obtenir une approximation du troisième ordre par la considération de courbes osculatrices ou par application du théorème de la moyenne. Une approximation d'un ordre aussi élevé qu'on le désire peut être obtenue dans le calcul graphique ou analytique de l'arc élémentaire compris entre les ordonnées x_1 et $x_1+\Delta x$ en construisant à partir du point initial $M_1(x_1, y_1)$ les directions de 2, 3, ... droites ayant respectivement comme inclinaisons $y'(x_1)$, $y'(x_1+\xi\Delta x)$, $y'(x_1+\eta\Delta x)$, ..., les quantités ξ, η, ζ, ... étant des coefficients numériques pour le moment arbitraires.

Donnant des poids α, β, γ, ... à chacune de ces directions, nous déterminons une direction :

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\alpha y'(x_1) + \beta y'(x_1+\xi\Delta x) + \gamma y'(x_1+\eta\Delta x) + \ldots}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}.$$

En choisissant convenablement les valeurs de α, β, γ, ..., ξ, η, ..., nous pourrons faire en sorte que le point d'intersection N_2 de la droite $y-y_1=(x-x_1)\operatorname{tang}\varphi$ avec l'ordonnée $x_1+\Delta x$ ne diffère du point M_2, intersection de l'intégrale exacte avec la même ordonnée, que de quantités d'ordre 3, 4, 5, 6, ... en Δx.

Pour que les n premiers termes du développement

$$y = y(x_1) + \frac{\Delta x}{1} y'(x_1) + \frac{\Delta x^2}{1.2} y''(x_1) + \ldots$$

soient les mêmes que pour les ordonnées des points N_2 et M_2, il faut qu'il existe entre les quantités α, β, γ, ..., ξ, η, ... les relations suivantes :

$$\beta\xi + \gamma\eta + \ldots = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}{2},$$

$$\beta\xi^2 + \gamma\eta^2 + \ldots = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}{3},$$

$$\beta\xi^3 + \gamma\eta^3 + \ldots = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}{4},$$

....

[1] Séance du 26 octobre 1931.

Ce système d'équations peut être aisément résolu : avec deux directions de tangente on a une infinité de solutions pour une approximation du troisième ordre, une solution unique pour une approximation du quatrième ordre. Avec trois directions de tangente on a une infinité de solutions pour une approximation du cinquième ordre et une solution unique pour une approximation du sixième ordre et ainsi de suite.

Parmi les solutions de ce problème on peut mettre en évidence les solution remarquables suivantes :

Valeurs des paramètres.					
α.	β.	γ.	ξ.		
					Approximation du troisième ordre.
1	1	0	1	0	(1) $y = y_1 + \Delta x \dfrac{y'(x_1) + y'(x_1 + \Delta x)}{2}$ (théorème de la moyenne)
0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	(2) $y = y_1 + \Delta x\, y'\left(x_1 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$
....					
					Approximation du quatrième ordre.
1	3	0	$\frac{2}{3}$	0	(3) $y = y_1 + \Delta x \dfrac{y'(x_1) + 3y'\left(x_1 + \frac{2}{3}\Delta x\right)}{4}$
					Approximation du cinquième ordre.
1	1	4	1	$\frac{1}{2}$	(4) $y = y_1 + \Delta x \dfrac{y'(x_1) + y'(x_1 + \Delta x) + 4y'\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{6}$
....					
					Approximation du sixième ordre.
1	0,453	0,512	0,4558	0,8774	(5) $y = y_1 + \Delta x \dfrac{\left\{\begin{array}{l} y'(x_1) + 0,453 y'(x_1 + 0,4558\Delta x) \\ \quad + 0,512 y'(x_1 + 0,877\Delta x) \end{array}\right\}}{1,965}$

Ces solutions correspondent à des constructions graphiques simples.

Pour le quatrième ordre, en menant de M_1 les droites correspondant aux valeurs de $y'(x)$ pour $x = x_1$ et $\left(x_1 + \frac{2}{3}\Delta x\right)$ et en divisant en quatre l'intervalle $\tau_1\tau_2$ délimité par ces droites sur l'ordonnée $x = x_1 + \Delta x$, le point N_2 cherché sera celui des trois points de divisions situé le plus près de τ_2.

Pour le cinquième ordre l'expression (4) s'écrit :

$$y = y_1 + \Delta x \frac{\dfrac{y'(x_1) + 2y'\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{3} + \dfrac{y'(x_1 + \Delta x) + 2y'\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{3}}{2}.$$

En traçant les trois directions définies par les valeurs de $y'(x)$ aux points x_1, $x_1 + \frac{\Delta x}{2}$, $x_1 + \Delta x$, on trouve trois points d'intersection τ_1, τ_2, τ_3 avec l'ordonnée $x = x_1 + \Delta x$. En divisant en trois chacun des deux intervalles $\tau_1\tau_2$ et $\tau_2\tau_3$, on trouve deux points de divisions σ_1, σ_2 qui sont les plus près de τ_2. Le point N_2 correspondant à une approximation du cinquième ordre se trouve au milieu du segment $\sigma_1\sigma_2$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Problèmes de valeurs à la frontière dans le cas de données discontinues.* Note de M. **Georges Giraud**.

Étant donné une équation aux dérivées partielles du type elliptique

$$(1)\quad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} + \sum_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = f \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m;\ a_{\alpha,\alpha} > 0),$$

le cas où les fonctions b_α, c, f présenteraient certaines discontinuités peut être abordé par les méthodes déjà indiquées. Supposons par exemple que les $a_{\alpha,\beta}$ remplissent dans tout $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ une condition de Hölder [1]. Soit $\mathcal{S}_1$ une certaine multiplicité située dans $\mathcal{D}$; on suppose que les coordonnées des points de $\mathcal{S}_1$ sont des fonctions de $m-1$ paramètres, dont les dérivées existent et sont lipschitziennes (au sens propre), et dont les déterminants fonctionnels ne s'annulent nulle part simultanément; on suppose qu'à deux systèmes différents de paramètres correspondent deux points différents, et que les points-frontières, s'il y en a, sont sur $\mathcal{S}$, cette dernière multiplicité satisfaisant aux hypothèses ordinaires. On suppose alors que les fonctions b_α, c, f sont continues en tout point de $\mathcal{D} - \mathcal{S}_1$ et qu'elles sont bornées. On peut alors se poser le problème de trouver une fonction u, continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et nulle sur $\mathcal{S}$, à dérivées continues en tout point de $\mathcal{D}$, et satisfaisant dans $\mathcal{D} - \mathcal{S}_1$ à l'équation (1) ou à la relation généralisée qui peut remplacer cette équation [2]. La solution s'obtient à peu près comme dans le cas déjà étudié : la seule différence est qu'on introduit la fonction de Green d'une opération différant du premier membre de (1) par les coefficients b_α et c, qu'on remplace par des fonctions continues, la dernière néga-

---

(1) Nom généralement adopté maintenant pour les conditions de Lipschitz généralisées, c'est-à-dire d'exposant quelconque. Pour les notations non expliquées ici, voir la Note des *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 353 à 355, et les publications antérieures qui y sont indiquées.

(2) Voir la Note citée ci-dessus.

tive ou nulle; on obtient encore une équation de Fredholm, qui donne toutes les solutions et chacune une seule fois [1].

Si l'on remplace la condition à la frontière par $\Theta u = \varphi$, la question se traite également sans difficulté. On peut en outre supposer que les fonctions ψ et φ, données sur la frontière, présentent des sauts brusques le long de certaines multiplicités et sont continues partout ailleurs : alors, à l'endroit d'un saut brusque, u reste continu, mais Θu se comporte d'une façon qui rappelle ce qui se passe pour le problème de Dirichlet harmonique dans le plan.

Pour le problème de Dirichlet, on peut aussi traiter le cas où les valeurs données sur $\mathcal{S}$ présenteraient des sauts brusques, mais le raisonnement utilise des hypothèses plus restreintes par ailleurs que ci-dessus.

Pour les deux sortes de données, la méthode permet aussi d'atteindre le cas où les fonctions b_α, c, f ne sont plus bornées, mais où les produits de ces fonctions par $s^{1-\lambda}$ sont bornés $(0 < \lambda < 1)$, s étant une fonction positive dans $\mathcal{D}$ et nulle sur $\mathcal{S}$, et dont les dérivées sont continues et ne s'annulent sur $\mathcal{S}$ nulle part ensemble. La théorie de Fredholm s'applique encore aux équations obtenues [2], et celles-ci continuent à donner toutes les solutions, et chacune une seule fois.

Mentionnons encore des questions d'une autre sorte qui peuvent aussi se traiter même quand les données présentent certaines discontinuités. Soient

$$\mathcal{F}(u, \lambda) = \Sigma_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + cu + \lambda h u \qquad (a_{\alpha,\alpha} > 0, \quad c \leqq 0),$$

$$\Theta(u, \lambda) = \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, \varpi_\beta \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \psi u + \lambda \omega u \qquad (\psi \geqq 0),$$

---

(1) Dans la démonstration intervient le proposition suivante : *Si, les fonctions* b_α, *c et f étant continues et $\mathcal{S}$ satisfaisant aux hypothèses ici faites pour $\mathcal{S}_1$, on a $c \leqq 0$ et $f \leqq 0$, et si le minimum de la solution non constante u est négatif ou nul, et si, au point X de $\mathcal{S}$ où ce minimum est atteint, on forme le rapport $t^{-1}[u(X) - u(Y)]$, où Y se déduit de X en remplaçant x_α par $x_\alpha - t\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta}\varpi_\beta$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$, ce rapport reste inférieur à un nombre négatif fixe dès que t est assez petit* (voir aussi MARCEL BRELOT, *Thèse*, Paris, 1931, p. 27 et 28). Cette proposition permet de démontrer que, si $c \leqq 0$ et $\psi \geqq 0$, le problème de Neumann homogène n'a que des solutions constantes, donc nulles si c ou ψ n'est pas identiquement nul (résultat déjà annoncé par M. Maurice Gevrey, *Journ. de Math.*, 9, 1930, p. 74 et 75).

(2) L'entier p introduit dans ces équations (par exemple : *Ann. Éc. Norm.*, 47, 1930, p. 245 à 265) peut être pris égal à un sans que la théorie de Fredholm cesse de s'appliquer (dans la Note des *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 498 à 500, on peut prendre $p = 0$).

c et ψ n'étant pas tous deux partout nuls. On demande pour quelles valeurs du paramètre λ il y a une fonction u non identiquement nulle telle que $\mathcal{F} = 0$ dans $\mathcal{D}$ et $\Theta = 0$ sur $\mathcal{S}$. On démontre qu'il y a toujours une infinité de telles valeurs de λ, toutes réelles, si h et ω ne sont pas ensemble identiquement nuls; si ces valeurs ne sont pas toutes négatives, à la plus petite λ_0 de celles qui sont positives ne correspond qu'une seule fonction u; si, en remplaçant la condition à la frontière par $u = 0$, on a pour le paramètre des valeurs analogues positives, λ_0 existe et est inférieur à la plus petite de celles-ci.

Si la condition à la frontière est $u = 0$, il y a aussi une infinité de valeurs de λ, toutes réelles, sauf si h est partout nul. De plus, on peut affirmer que, si $\mathcal{D}'$ est compris dans $\mathcal{D}$, la plus petite valeur positive de λ correspondant à $\mathcal{D}$ est plus petite que la plus petite valeur positive correspondant à $\mathcal{D}'$ (1); à cette plus petite valeur positive correspond une seule fonction u.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *La construction de la matrice intégrale normale d'un système d'équations différentielles linéaires dans le voisinage d'un pôle de ses coefficients.* Note (2) de M. **J. A. Lappo-Danilevski**, présentée par M. Hadamard (3).

Le système en question peut être mis au moyen de matrices sous la forme

$$(1) \qquad \frac{dY}{dx} = Y \sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p,$$

où les éléments des matrices T_p sont indépendants de x. L'étude du système (1) est liée à la théorie des fonctions analytiques d'un ensemble dénombrable de matrices, et nous commençons par un théorème de cette théorie qui joue un rôle essentiel dans la suite :

Théorème I. — Soient X_p $(p = 1, 2, \ldots)$ *des matrices d'ordre n et* $\alpha_{p_1 p_2 \ldots p_\nu}$ $(p_s = 1, 2, \ldots; \nu = 1, 2, \ldots)$ *des nombres. Supposons que, pour une valeur donnée de* ν, *les nombres* $\alpha_{p_1 p_2 \ldots p_\nu}$ *sont bornés en module et soit* $|\alpha_{p_1 p_2 \ldots p_\nu}| \leq \alpha^{(\nu)}$.

(1) Léon Lichtenstein, *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen*, Berlin, 1931, p. 102.

(2) Séance du 3 novembre 1931.

(3) Cette Note a été trouvée dans les papiers de M. Danilevski, récemment décédé.
E. P.

Supposons encore que le rayon de convergence de la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^{\nu} \tag{2}$$

est positif et désignons ce rayon par $n\rho$. Sous ces conditions, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1,\ldots,p_\nu=1}^{\infty} |X_{p_1}| \ldots |X_{p_\nu}| \, |\alpha_{p_1\ldots p_\nu}| \tag{3}$$

sera convergente dans le domaine

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|. \tag{4}$$

Dans ce cas nous dirons que la série des combinaisons

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1,\ldots,p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \, \alpha_{p_1\ldots p_\nu} \tag{5}$$

est une fonction de X_p également holomorphe dans le voisinage (4). Si la série (2) est fonction entière de ξ, la série (3) converge sous la condition de la convergence de la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p|,$$

et dans ce cas nous dirons que (5) est une fonction également entière. Remarquons que $|X|$ est la matrice dont les éléments sont les modules des éléments de la matrice X et $\|\rho\|$ est la matrice aux éléments

$$X_{ik} = X_{kk} = \rho \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

La théorie des fonctions également holomorphes de la forme (5) est analogue à la théorie des fonctions d'un nombre fini de matrices développée par l'auteur dans ses Mémoires précédents [1].

Soit $Y_b(x)$ la matrice intégrale du système (1) normale au point b, c'est-à-dire se réduisant à la matrice unité I pour $x = b$.

THÉORÈME II. — *Si les points b et x satisfont aux inégalités $0 < |b|$ et*

---

[1] *Recueil Math. de la Société math. de Moscou*, 34, II, 1927, p. 113-148; *Journal de la Société math. de Leningrad*, 2, I, 1928, p. 94-120.

$|x| < 1$, *la matrice* $Y_b(x)$ *est la fonction également entière des matrices* T_p *représentable par le développement*

$$(6)\qquad Y_b(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1,\ldots,p_\nu=-\infty}^{\infty} T_{p_1}\ldots T_{p_\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu} x^{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}$$
$$\times \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1\ldots p_\mu} \log^\lambda b \sum_{i=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(i)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu} \log^i x,$$

où les coefficients α *et* $\overset{*}{\alpha}$ *sont définis par les relations de récurrence :*

$$\alpha^{(0)}_{p_1} = \frac{1}{p_1+1}; \qquad \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1} = \frac{1}{p_1+1} \qquad (\text{si } p_1+1 \neq 0);$$
$$\alpha^{(1)}_{p_1} = \begin{cases} 0 \text{ si } p_1+1 \neq 0 \\ 1 \text{ si } p_1+1 = 0 \end{cases}; \qquad \overset{*}{\alpha}{}^{(1)}_{p_1} = \begin{cases} 0 \text{ si } p_1+1 \neq 0 \\ 1 \text{ si } p_1+1 = 0 \end{cases};$$
$$\alpha^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu} = 0;$$
$$\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu} = \frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\Big[\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} - \frac{\mu+1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}$$
$$+ \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2}\alpha^{(\mu+2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} - \ldots$$
$$+ (-1)^{\nu-\mu-1}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\Big];$$
$$\overset{*}{\alpha}{}^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu} = 0;$$
$$\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu} = \frac{-1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\Big[\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu)}_{p_2\ldots p_\nu} - \frac{\mu+1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu+1)}_{p_2\ldots p_\nu}$$
$$+ \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2}\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu+2)}_{p_2\ldots p_\nu} - \ldots$$
$$+ (-1)^{\nu-\mu-1}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\overset{*}{\alpha}{}^{(\nu-1)}_{p_2\ldots p_\nu}\Big]$$
$$(\mu = \nu-1, \nu-2, \ldots, 1, 0 \text{ et } p_1+\ldots+p_\nu+\nu \neq 0);$$
$$\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu} = \frac{1}{\mu}\alpha^{(\mu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}; \qquad \overset{*}{\alpha}{}^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu} = -\frac{1}{\mu}\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu-1)}_{p_2\ldots p_\nu}$$
$$(\mu = \nu, \nu-1, \ldots, 1 \text{ et } p_1+\ldots+p_\nu+\nu = 0).$$

et les coefficients $\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$ *et* $\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$ *dans le cas* $p_1+\ldots+p_\nu+\nu = 0$ *doivent seulement satisfaire à la condition*

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu} = \alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu} + \alpha^{(0)}_{p_2\ldots p_\nu}\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1} + \ldots + \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu} = 0.$$

Il nous sera utile dans la suite de prendre $\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu} = 0$ pour $p_1+\ldots+p_\nu+\nu = 0$.

La matrice $Y_0(x)$ subit du côté gauche la « substitution intégrale » $U(b)$, quand x décrit un circuit entourant le pôle $x=0$.

Théorème III. — *Les substitutions* $V(b)^k (k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ *sont des fonctions également entières des matrices* T_p *représentables par les développements*

$$(7)\qquad V(b)^k = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1,\ldots,p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}\ldots T_{p_\nu} b^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\ldots p_\mu} \sum_{h=0}^{\nu-\mu} \alpha^{h}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu} (2k\pi i)^h$$

Remarquons encore que si le rayon de convergence de la série

$$\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p$$

est égal à R, les développements (6) et (7) seront absolument convergents au sens du théorème I pour $0<|b|$ et $|x|<R$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une propriété générale des ensembles minimaux de M. Birkhoff.* Note [1] de M. **A. Markoff**, présentée par M. Hadamard.

Soient R un espace topologique, régulier à système déterminant dénombrable [2], $\{\varphi_t\}_{-\infty<t<\infty}$ un groupe continu monoparamétrique de transformations topologiques de l'espace R en lui-même, c'est-à-dire un système de telles transformations φ_t, jouissant des propriétés suivantes : 1° $\varphi_t x$ [3] est une fonction continue du paramètre réel t et du point x de l'espace R ; 2° on a identiquement $\varphi_u \varphi_v x \equiv \varphi_{u+v} x$.

Nous dirons que l'ensemble A contenu dans R est *invariant* (par rapport au groupe considéré) lorsque chaque φ_t le transforme en lui-même. Nous dirons que A est un ensemble *minimal* lorsqu'il est irréductible par rapport à la propriété d'être invariant, compact en soi et non vide.

---

(1) Séance du 3 novembre 1931.

(2) Pour les définitions de ces notions, voir par exemple : P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts* (*Verh. K. Akad. Wetens. Amsterdam, Afd. Nat.*, 14, 1, 1929, p. 1 et 5).

(3) $\varphi_t x$ désigne l'image du point x correspondant à la transformation φ_t. A étant un ensemble $\varphi_t A$ désigne l'ensemble d'images de ses points correspondant à φ_t ; $\bar{A}$ désigne la fermeture de l'ensemble A ; dim A = la dimension de A.

On voit que la dernière notion est une généralisation naturelle d'une notion importante due à M. Birkhoff, se rattachant au cas où R est un domaine euclidien n dimensionnel [1] ou bien une multiplicité fermée à n dimensions [2], le groupe $\{\varphi_t\}$ étant déterminé par un système de n équations différentielles ordinaires.

Malgré leur importance évidente pour l'étude qualitative des solutions des systèmes différentiels, et en particulier pour la théorie qualitative des mouvements des systèmes dynamiques, les ensembles minimaux ont été très peu étudiés. On doit à M. Birkhoff le théorème général d'existence de ces ensembles [3], quelques autres théorèmes importants [4] et un exemple intéressant d'un ensemble minimal non localement connexe [5]. Les qualités les plus essentielles de ces ensembles : leur nature topologique en général, leur structure dimensionnelle, leurs propriétés combinatoires, tout cela constitue aujourd'hui un domaine tout à fait inexploré.

Dans cette Note nous allons établir la propriété suivante des ensembles minimaux concernant leur structure au point de vue de la théorie de dimension de MM. Brouwer, Urysohn et Menger :

Un ensemble minimal de dimension finie et positive est toujours une multiplicité cantorienne (cette dernière notion a été introduite par P. Uryshon dans son *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes* (*Fund. Math.*, 7, 1925, p. 30-137; 8, 1928, p. 225-259; *Verh. K. Akad. Wet. Amsterdam*, 1927). Voir spécialement *Fund. Math.*, 7, p. 124.

Soit F un ensemble invariant, compact en soi, de dimension finie $n > 0$. Admettons que cet ensemble n'est pas une multiplicité cantorienne et montrons qu'alors il n'est pas minimal.

Remarquons d'abord qu'en vertu de notre hypothèse il existe deux ensembles fermés F_1 et F_2, satisfaisant aux conditions

$$(1)\qquad F_1 + F_2 = F, \qquad F_1 \neq F \neq F_2, \qquad \dim(F_1 F_2) \leqq n-2.$$

D'après un théorème de MM. Hurevicz et Menger (K. Menger, *Dimen-*

---

(1) G. D. Birkhoff, *Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques* (*Bull. Soc. math. France*, 40, 1912, p. 303-323).

(2) G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, New-York, 1927, Chap. VII.

(3) Ce théorème peut être formulé comme il suit : chaque ensemble invariant, compact en soi et non vide, contient un ensemble minimal. Cf. *loc. cit.* (1), p. 314; *loc. cit.* (2), p. 200.

(4) *Loc. cit.* (1), p. 312-316; *loc. cit.* (2), p. 199-201.

(5) *Loc. cit.* (1), p. 318-323.

sionstheorie, Leipzig und Berlin, 1928, p. 217-221), F contient une multiplicité cantorienne n-dimensionnelle. Soient M une telle multiplicité, t un nombre réel quelconque. L'ensemble $\varphi_t M$ homéomorphe à M, étant aussi une multiplicité cantorienne n-dimensionnelle, on a une des inclusions $\varphi_t M \subset F_i (i = 1, 2)$, autrement l'ensemble

$$\varphi_t M - (F_1 F_2) = (\varphi_t M - F_1) + (\varphi_t M - F_2)$$

ne serait pas connexe, ce qui est impossible en vertu de (1).

Soit A_i l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles on a $\varphi_t M \subset F_i$. On voit alors sans peine que les A_i sont fermés. Nous avons déjà vu qu'on a

$$\mathcal{E} = A_1 + A_2,$$

$\mathcal{E}$ désignant la droite des nombres réels. Les ensembles A_i sont en outre disjoints, car dans le cas contraire il existerait une valeur de t pour laquelle l'ensemble n-dimensionnel $\varphi_t M$ serait contenu dans l'ensemble $n - 2$-dimensionnel au plus $F_1 F_2$.

Il en résulte qu'un des ensemble A_i, soit A_1, coïncide avec $\mathcal{E}$, ce qui donne

$$\varphi_t M \subset F_1 \qquad (-\infty < t < \infty),$$

d'où

$$(2) \qquad \sum_{t \in \varepsilon} \varphi_t M \subset F_1.$$

Le premier membre de l'inclusion (2) étant manifestement un ensemble invariant, compact en soi, non vide et F_1 étant un vrai sous-ensemble de F, il s'ensuit que F n'est pas un ensemble minimal. C. Q. F. D.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques équations aux dérivées partielles.* Note [1] de M. **Jacques Devisme**, présentée par M. Élie Cartan.

1. Nous nous proposons d'étudier quelques propriétés des équations aux dérivées partielles $\frac{\partial^r U}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_r} = 0$ et de quelques autres qui s'y ramènent.

Posons

$$\Delta_r U = \frac{\partial^r U}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_r}, \qquad \Delta_r^m U = \frac{\partial^{mr} U}{\partial u_1^m \partial u_2^m \ldots \partial u_r^m},$$

---

(1) Séance du 3 décembre 1931.

et cherchons les intégrales des équations

$$(1)\qquad \Delta_r U = 0,$$

$$(2)\qquad \Delta_r^m U = 0,$$

qui ne dépendent que du produit $p_r = u_1 u_2 \ldots u_r$.

Un calcul simple fournit pour l'équation (1) les intégrales

$$\operatorname{Log} p_r,\quad \operatorname{Log}^2 p_r,\quad \ldots,\quad \operatorname{Log}^{r-1} p_r,$$

et pour l'équation (2) les intégrales

$$p_r^i \operatorname{Log}^j p_r \qquad (i = 0,\ \ldots,\ m-1;\ j = 0,\ \ldots,\ r-1).$$

Ce résultat est particulièrement intéressant quand on effectue sur les u_i une transformation opérant de la même façon sur p_r et sur $\Delta_r U$. Donnons comme exemples à ce sujet l'équation de Laplace à deux dimensions ou encore l'équation de M. P. Humbert ([1]). Nous reviendrons prochainement sur ce point.

2. Proposons-nous maintenant de généraliser la formule de Green. Pour éviter les complications d'indices, nous ne donnerons les résultats que dans le cas de trois variables et nous poserons

$$\Delta U = \frac{\partial^3 U}{\partial u\, \partial v\, \partial w},\qquad \Delta^m U = \frac{\partial^{3m} U}{\partial u^m\, \partial v^m\, \partial u^m},\qquad \Delta^0 U = U,\qquad p = uvw,$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial^2 U}{\partial v\, \partial w}\, dv\, dw = \mathcal{A}(U)\, d\sigma,\qquad \mathrm{S}\frac{\partial V}{\partial v}\,\frac{\partial U}{\partial w}\, dv\, dw = \mathcal{B}(V, U)\, d\sigma.$$

De l'égalité

$$3[V\,\Delta U + U\,\Delta V] = \mathrm{S}\frac{\partial}{\partial u}\left[V\,\frac{\partial^2 U}{\partial v\, \partial w} - \frac{\partial V}{\partial v}\,\frac{\partial U}{\partial w} + \frac{\partial^2 V}{\partial v\, \partial w}\,U\right],$$

on déduit aisément la relation cherchée

$$3\iiint_D [V\,\Delta U + U\,\Delta V]\, d\tau = \iint_\Sigma [V\,\mathcal{A}(U) + U\,\mathcal{A}(V) - \mathcal{B}(V, U)]\, d\sigma.$$

En faisant $V = 1$, $\operatorname{Log} p$, $\operatorname{Log}^2 p$, on obtiendra une série d'identités que vérifie toute intégrale U de $\Delta U = 0$ sur une surface fermée Σ.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, ceci se généraliserait en calculant d'une façon générale la quantité

$$V\,\Delta_r U - (-1)^r U\,\Delta_r V.$$

(1) P. Humbert, *Sur une généralisation de l'équation de Laplace* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 8, 1920, p. 145).

Remarque. — En utilisant les notations de M. P. Humbert, qui sont le plus souvent très avantageuses nous verrions apparaître les groupements

$$\mathbf{S}\left[\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y\,\partial z}\right]dy\,dz,\quad \mathbf{S}\left[\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right]dy\,dz.$$

3. Généralisons maintenant quelques résultats récents de M. M. Ghermanesco ([1]). En conservant les notations du paragraphe 2, nous avons

$$\begin{aligned}3(\Delta^i\mathrm{V}\,\Delta^k\mathrm{U}+\Delta^{i+1}\mathrm{V}\,\Delta^{k-1}\mathrm{U}) &= \mathbf{S}\frac{\partial}{\partial u}\left[\Delta^i\mathrm{V}\frac{\partial^2\Delta^{k-1}\mathrm{U}}{\partial v\,\partial w}-\frac{\partial\Delta^i\mathrm{V}}{\partial v}\frac{\partial\Delta^{k-1}\mathrm{U}}{\partial w}+\frac{\partial^2\Delta^i\mathrm{V}}{\partial v\,\partial w}\Delta^{k-1}\mathrm{U}\right]\\ &= \mathbf{S}\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{X}(\Delta^i\mathrm{V},\,\Delta^{k-1}\mathrm{U}),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&3(\Delta^i\mathrm{V}\,\Delta^k\mathrm{U}\pm\Delta^i\mathrm{U}\,\Delta^k\mathrm{V})+(\Delta^{i+1}\mathrm{V}\,\Delta^{k-1}\mathrm{U}\pm\Delta^{i+1}\mathrm{U}\,\Delta^{k-1}\mathrm{V})]\\ &\quad=\mathbf{S}\frac{\partial}{\partial u}[\mathrm{X}(\Delta^i\mathrm{V},\,\Delta^{k-1}\mathrm{U})\pm\mathrm{X}(\Delta^i\mathrm{U},\,\Delta^{k-1}\mathrm{V})].\end{aligned}$$

En faisant des combinaisons linéaires convenables, et en intégrant dans tout un domaine D de frontière Σ, on est amené aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}&3\iiint_{\mathrm{D}}[\mathrm{V}\,\Delta^{2m}\mathrm{U}-\mathrm{U}\,\Delta^{2m}\mathrm{V}]\,d\tau\\ &\quad=\iint_{\Sigma}\left\{\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k[\Delta^{2m-k}\mathrm{V}\,\mathcal{A}(\Delta^{k-1}\mathrm{U})-\Delta^{2m-k}\mathrm{U}\,\mathcal{A}(\Delta^{k-1}\mathrm{V})]\right.\\ &\qquad\left.-\sum_{k=1}^{m}(-1)^k[\mathcal{B}(\Delta^{2m-k}\mathrm{V},\,\Delta^{k-1}\mathrm{U})-\mathcal{B}(\Delta^{2m-k}\mathrm{U},\,\Delta^{k-1}\mathrm{V})]\right\}d\sigma,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&3\iiint_{\mathrm{D}}[\mathrm{V}\,\Delta^{2m+1}\mathrm{U}+\mathrm{U}\,\Delta^{2m+1}\mathrm{V}]\,d\tau\\ &\quad=\iint_{\Sigma}\left\{\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k[\Delta^{2m-k}\mathrm{V}\,\mathcal{A}(\Delta^{k}\mathrm{U})-\Delta^{2m-k}\mathrm{U}\,\mathcal{A}(\Delta^{k}\mathrm{V})]\right.\\ &\qquad-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k[\mathcal{B}(\Delta^{2m-k}\mathrm{V},\,\Delta^{k}\mathrm{U})-\mathcal{B}(\Delta^{2m-k}\mathrm{U},\,\Delta^{k}\mathrm{V})]\\ &\qquad\left.-\frac{(-1)^m}{2}[\mathcal{B}(\Delta^m\mathrm{V},\,\Delta^m\mathrm{U})-\mathcal{B}(\Delta^m\mathrm{U},\,\Delta^m\mathrm{V})]\right\}d\sigma.\end{aligned}$$

En faisant $\mathrm{V}=p^i\,\mathrm{Log}^j p$, on obtiendra une série d'identités que vérifie toute intégrale U de $\Delta^n\mathrm{U}=0$ sur une surface fermée Σ.

([1]) *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 477.

On généraliserait aisément ces résultats; il est toutefois remarquable de constater que la parité de r influe sur leur allure; c'est ainsi, par exemple, que lorsque l'on considère des expressions telles que

$$\varpi_n^r(\lambda, U) = \Delta_r^n U + \lambda_1 \Delta_r^{n-1} U + \ldots + \lambda_n U,$$

on est obligé, lorsque r est impair, d'introduire l'expression :

$$\overline{\varpi_n^r(\lambda, U)} = (-1)^n \Delta_r^n U + (-1)^{n-1} \lambda_1 \Delta_r^{n-1} U + \ldots + \lambda_n U,$$

pour pouvoir utiliser les formules analogues à celles écrites plus haut.

Signalons pour terminer que cette Note a été rédigée sans ignorer le Mémoire de M. Th. De Donder (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 7, 1928, p. 173).

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur un théorème de Wiman.* Note [1] de M. **Arnaud Denjoy**, présentée par M. Hadamard.

Je voudrais donner une démonstration simple et rapide d'un théorème de Wiman sur les fonctions entières de genre zéro.

Soit $F(z)$ une telle fonction vérifiant $F(0) = 1$. Soient $\mu(r)$ et $M(r)$ respectivement le minimum et le maximum de $|F(z)|$ pour $|z| = r$. Le cas où $F(z) = A z^m F_1(z)$ avec $F_1(0) = 1$ se prêterait à l'application de la formule ci-après, sinon pour toute valeur de r, du moins à partir d'une certaine valeur positive de r, indépendante de $F_1(z)$.

Généralement, si $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont les zéros de $F(z)$, avec $|a_n| = r_n$, supposons que la série $\sum \frac{1}{r_n^\alpha}$ est convergente $(0 < \alpha < 1)$.

Posant

$$\theta(x) = \log|1 - x| - \cos\pi\alpha \log(1 + x),$$

considérons l'intégrale

$$\psi(x) = \int_x^\infty \frac{\theta(x)}{x^{1+\alpha}} dx.$$

D'après

$$\int_0^\infty \log|1 - x| \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{\pi}{\alpha} \cot \alpha, \qquad \int_0^\infty \log(1 + x) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{\pi}{\alpha \sin\pi\alpha},$$

on a

$$\psi(0) = \psi(\infty) = 0.$$

---

(1) Séance du 3 novembre 1931.

ce qui permet d'écrire aussi

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} \frac{\theta(x)}{x^{1+\alpha}}\,dx.$$

Un raisonnement très élémentaire montre que $\theta(x)$ n'a qu'un changement de signe. On en conclurait déjà que $\psi(x)$ *est positif, quel que soit x positif.*

Mais pour obtenir un résultat dans le cas de $\alpha = \frac{1}{2}$, nous remarquons encore que si l'on pose

$$\psi(x) = \psi(x, \alpha) = \lambda(x, \alpha)\,\frac{\log(1+x)}{x^{\alpha}},$$

$\lambda(x,\alpha)$ tend vers $\frac{1-\cos\pi\alpha}{\alpha} = \omega(\alpha)$ pour x_∞ et vers $\frac{1+\cos\pi\alpha}{1-\alpha} = \omega(1-\alpha)$ pour $x = 0$. $\lambda(x,\alpha)$ a par suite un minimum positif $h(\alpha)$. D'ailleurs, $h(\alpha) = \omega(\alpha)$ pour $\alpha < 1/2$, $h(\alpha) = \omega(1-\alpha)$ pour $\alpha > 1/2$, et en tout cas $h(\alpha) > \frac{\pi}{2}\sin\pi\alpha$. Quel que soit α, $\lambda(x,\alpha)$ a de même un maximum fini $k(\alpha)$.

Cela posé, soient

$$G(r) = \prod_{n=1}^{n=\infty}\left|1 - \frac{r}{r_n}\right|, \qquad H(r) = \prod_{1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{r_n}\right).$$

On a évidemment

$$G(r) \leq \mu(r), \qquad M(r) \leq H(r).$$

On déduit des propriétés de $\psi(x)$ l'inégalité

$$(1) \qquad r^{\alpha}\int_r^{\infty}[\log G(u) - \cos\pi\alpha \log H(u)]\,\frac{du}{u^{1+\alpha}} > h(\alpha)\log H(r).$$

La substitution dans le premier membre de (1) de la série

$$\sum_1^{\infty} \log\left|1 - \frac{u}{r_m}\right|$$

à $\log G(u)$ est légitime. Car si l'on intègre les valeurs absolues de chaque terme, la série obtenue est convergente en même temps que

$$\sum \frac{1}{r_n^{\alpha}}.$$

Il résulte de la formule (1) que, quel que soit r :

1° Il y a des valeurs de u supérieures à r et pour lesquelles

$$\log G(u) > \cos\pi\alpha \log H(u).$$

C'est le théorème de Wiman pour $\alpha \neq 1/2$.

2° Pour $\alpha = 1/2$ et $h(\alpha) = 2$, l'inégalité $G(u) > H(r)$ est vérifiée pour des valeurs de u supérieures à r. Donc $\overline{\lim}_{u\infty} G(u) = \infty$ et *a fortiori* $\overline{\lim}_{u\infty} \mu(u) = \infty$ *quand* $F(z^2)$ *est de genre zéro*. C'est le théorème de Wiman pour $\alpha = 1/2$.

Observons que le premier membre de l'inégalité (1) est inférieur à $k(\alpha) \log H(r)$.

Ces diverses formules semblent permettre d'obtenir aisément les propriétés connues du minimum d'une fonction entière.

CALCUL GRAPHOMÉCANIQUE. — *Sur des intégrateurs mécaniques à liaisons holonomes*. Note [1] de M. **Bernard Salomon**, présentée par M. d'Ocagne.

1. Les intégrateurs mécaniques connus jusqu'ici utilisent des roulettes, des sphères, des lames coupantes, etc.

Ils sont donc fondés sur la réalisation de liaisons *non holonomes*.

La présente Note concerne des intégrateurs à *liaisons holonomes* : l'équation fondamentale n'est plus une traduction des liaisons; elle est d'origine dynamique et résulte de certaines hypothèses sur les forces appliquées.

2. Soit un système dépendant des variables indépendantes : $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Par hypothèse, l'expression $2T$ de la force vive ne contient pas q_i, qui est alors une variable *cyclique*. Si, en outre, la force généralisée φ_i est nulle à tout instant, cette variable est *cachée* ou *ignorable*.

L'équation de Lagrange qui lui correspond donne alors, après intégration :

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = \text{const.}, \tag{1}$$

relation qui peut être susceptible de servir de base à des appareils intégrateurs.

3. En particulier, soit un solide de révolution suspendu par son centre

---

[1] Séance du 26 octobre 1931.

de gravité, *avec frottements très faibles sur les pivots de l'axe de révolution.*

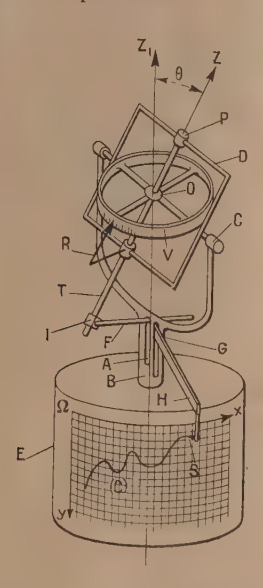
L'équation de Lagrange relative à la variable *cachée* φ est

(2) $$r_0 = \varphi' + \psi' \cos\theta,$$

et devient, si à l'origine, le système était au repos

(3) $$d\varphi = -\cos\theta\, d\psi,$$

sur la réalisation de laquelle on peut fonder un intégrateur mécanique.



4. Soit, par exemple, à intégrer une fonction $y = f(x)$ représentée, en coordonnées cartésiennes, par une courbe (c). On réalise les relations

(4) $$\begin{cases} \psi = px, \\ \cos\theta = qy, \end{cases}$$

les constantes p et q étant judicieusement choisies. L'équation

(5) $$\varphi - \varphi_0 = -\int \cos\theta\, d\psi = -pq \int y\, dx$$

montre que la différence $\varphi - \varphi_0$ relative à la rotation propre du solide de révolution donne la quadrature cherchée.

5. Sur un cylindre de révolution E d'axe Oz_1 s'enroule une feuille sur laquelle la courbe (C) est rapportée aux axes Ωx, Ωy.

D'autre part, un manchon B susceptible de tourner autour d'une colonne verticale A d'axe Oz_1 se termine par une fourche portant deux pivots C pour le cadre D.

Ce cadre présente deux portées p, à *frottements aussi faibles que possible* pour les pivots d'un axe Oz solidaire d'un volant parfaitement équilibré V, gradué sur la tranche qui fait face au repère R fixé au cadre D.

Le cadre D porte en prolongement de l'axe Oz une règle T sur laquelle se bloque un curseur I solidaire d'une bielle F qui demeure perpendiculaire à l'axe Oz_1, grâce à un croisillon G dont la branche verticale entraîne, par un levier coudé, une pointe S.

Pour astreindre la pointe S à suivre la courbe (C), il suffit à l'opérateur de modifier d'une manière continue l'angle de rotation ψ de l'équipage autour de Oz_1, et d'agir simultanément sur l'inclinaison $\frac{\pi}{2} - \theta$ du cadre D.

On a alors :

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx = a\varphi + bx + c, \tag{6}$$

a, b et c étant certaines constantes.

MÉCANIQUE QUANTIQUE. — *Sur la théorie du rayonnement.* Note [1] de M. **Al. Proca**, présentée par M. Jean Perrin.

1. Le prodigieux essor de la Mécanique auquel nous assistons aujourd'hui est dû en majeure partie à l'emploi de notions et de procédés de calcul empruntés à l'Optique. Par contre l'Optique elle-même a très peu profité de ce développement [2]. On peut alors retourner le problème et essayer de voir si les progrès récents de la Mécanique ne peuvent pas réagir sur le développement de l'Optique. D'une façon plus précise, dans la théorie de MM. de Broglie et Schrödinger, on considérait une particule matérielle comme une onde et on lui appliquait les lois de la lumière; le succès a montré qu'il y avait là quelque chose de plus qu'une simple analogie. Ne peut-on pas alors considérer inversement un photon comme un point matériel *et lui appliquer les lois de la nouvelle mécanique?*

---

[1] Séance du 3 novembre 1931.

[2] Il faut mettre à part la théorie quantique des champs; celle-ci vise beaucoup plus loin, et saute précisément par dessus l'étape que nous voulons explorer.

2. Soit $E = cp_0$ l'énergie et (p_1, p_2, p_3) la quantité de mouvement d'un photon. Son mouvement ne peut être décrit sans faire appel à la relativité; nous prendrons donc comme guide la théorie relativiste de Dirac. On a

$$(1) \qquad p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0.$$

Comme pour l'équation de Dirac, cette relation nous conduit à l'équation d'onde

$$(2) \qquad F\psi \equiv (p_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3)\psi = 0.$$

les β_n étant des opérateurs satisfaisant à $\beta_r\beta_s + \beta_s\beta_r = 2\delta_{rs}$.

Jusqu'ici le passage est simple et cette extension doit s'être présentée bien des fois; cependant, on ne peut pas poursuivre l'analogie plus loin *en raisonnant comme le fait Dirac* (¹), parce qu'on n'arriverait pas au nombre de grandeurs requis pour représenter le champ. Il faut avoir recours à une généralisation que nous avons proposée (²) et admettre que ψ est un nombre hypercomplexe du même type que F, c'est-à-dire, somme toute, un quaternion $\psi = \psi_0 + \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \beta_3\psi_3$ qui multiplie *algébriquement* F. L'équation (2) s'écrit alors

$$(3) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \beta_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0.$$

Bref, nous traitons le problème du mouvement d'un point ayant comme hamiltonien

$$(4) \qquad H = c(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3),$$

et nous assimilons un tel point à un photon; c'est là l'hypothèse fondamentale.

3. ψ, grandeur imaginaire, représente l'onde du photon. Or, si l'on pose

$$\psi_r = E_r + iH_r,$$

on voit, en faisant les calculs, que les E_r, H_r ($r = 1, 2, 3$), grandeurs réelles, satisfont à des équations du type Maxwell : il est naturel de les identifier aux champs électrique et magnétique de l'onde lumineuse (³). Les équations (3)

(¹) Cf. par exemple, OPPENHEIMER, *Phys. Rev.*, 38, 1931, p. 728.

(²) *Journal de Physique*, 7ᵉ série, 1, 1930, p. 235.

(³) Ce mode de groupement de E et H a été souvent employé par beaucoup d'auteurs, à diverses fins. Signalons que Rosenfeld et Solomon l'avaient également adopté au début ; ils l'ont abandonné ensuite pour des raisons sérieuses.

décrivant une propagation *dans le vide*, sont identiques aux équations de Maxwell *avec courant et charge*; lesquels sont uniquement déterminés par la composante ψ_0. La théorie conduit donc à abandonner les équations de Maxwell pour le vide, ou plutôt à les compléter par des termes dépendant de ψ_0. Cet abandon est-il au moins compensé par des résultats nouveaux que l'ancienne théorie était incapable de prédire?

4. Remarquons d'abord que, si ψ_0 était négligeable, (3) se réduirait aux équations de Maxwell et que, par conséquent, toute vérification expérimentale des unes conviendrait aux autres. Mais les (3) conduisent à des résultats nouveaux. Un premier résultat évident est l'existence d'un *spin pour les photons*. Il suffit d'appliquer mot pour mot le raisonnement classique de Dirac pour l'électron.

On croit généralement qu'un pareil spin n'existe pas ([1]). Cependant des expériences récentes de Raman et ses collaborateurs, de Hanle et de Bär, interprétées par la théorie des quanta, semblent montrer la nécessité d'un spin pour la lumière ([2]). Elles ne sont pas, à vrai dire, concluantes, parce qu'on peut les interpréter par la théorie classique, sans appel à des notions nouvelles ([3]). D'ailleurs si elles l'étaient, elles infirmeraient la présente théorie parce qu'elles conduisent à un spin deux fois plus grand qu'il n'est nécessaire. Il faut donc, en attendant que cette question soit définitivement tranchée par l'expérience, chercher dans une autre direction des confirmations de la théorie.

Journal de Physique, 7e série, 2, 1931, p. 139 et SOLOMON, *Thèse*, Paris). Cependant il faut remarquer que ces auteurs se laissent guider par le principe de correspondance et admettent la validité absolue des équations de Maxwell, tandis que le point de vue préconisé ici conduit précisément à un abandon partiel de ces équations. Mentionnons enfin que Lanczos a, le premier, rapproché les équations de Maxwell du symbolisme des quaternions.

([1]) Voir, par exemple, KASTLER, *J. Physique*, 2, 1931, p. 159. — FRISCH, *Z. Physik*, **61**, 1930, p. 626.

([2]) HANLE, *Phys. Ztschr.*, **32**, 1931, p. 556. — BÄR, *Naturwiss*, **19**, 1931, p. 463. — RAMAN et BHAGAVANTAM, *Nature*, **128**, 1931, p. 114, 545, 727.

([3]) PLACZEK, *Leipziger Vorträge*, 1931; *Z. Physik*, **70**, 1931, p. 84.

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur le mouvement d'un fluide visqueux au voisinage d'un disque oscillant autour de son axe.* Note de MM. **A. Foch** et **J. Bariol**, présentée par M. M. Brillouin.

L'étude de l'amortissement des oscillations de rotation d'un disque en milieu visqueux a été souvent utilisée pour la détermination du coefficient de viscosité. La méthode de calcul utilisée suppose que le mouvement du fluide a lieu par tranches parallèles au disque et oscillant en bloc. Nous avons essayé de vérifier cette hypothèse en faisant osciller un disque autour de son axe dans de la glycérine et en photographiant les particules fluides matérialisées par des bulles en suspension.

Le phénomène est évidemment sous la dépendance du nombre de Reynolds $\frac{1}{2}\frac{VD}{\nu} = \frac{\omega r^2}{\nu}$, ω désignant la vitesse angulaire maximum du disque, r son rayon et ν le coefficient de viscosité cinématique du fluide. Les expériences ont été faites avec deux disques de rayons respectifs 10 et 5^{cm}; les périodes étaient de l'ordre de la seconde; l'oscillation était entretenue mécaniquement.

1° Pour des nombres de Reynolds inférieurs à 60 (ce qui correspond sensiblement aux conditions des expériences classiques de Maxwell sur l'air), les photographies dont la durée de pose n'excède pas quelques périodes montrent des trajectoires parfaitement circulaires, coaxiales au disque, se superposant à chaque oscillation; l'amplitude des trajectoires situées dans un même plan perpendiculaire à l'axe est proportionnelle aux rayons, *ce qui confirme l'existence pratiquement réalisée d'un mouvement en bloc de chaque tranche.* L'amplitude angulaire du mouvement des diverses tranches diminue exponentiellement en fonction de la distance au disque; mais la valeur du coefficient de viscosité déduite de cet amortissement est supérieure à la valeur mesurée par un viscosimètre capillaire, la concordance s'améliorant à mesure que la vitesse angulaire maxima devient plus faible. Le désaccord est vraisemblablement dû à la centrifugation *lente* que le mouvement d'oscillation provoque dans le fluide, *centrifugation qui est mise en évidence par une pose prolongée pendant quelques dizaines de périodes.* L'importance de ce phénomène décroissant avec la pulsation, on peut en éliminer l'influence en extrapolant les résultats que l'on obtient avec des poses de plus en plus faibles.

2° Lorsque le nombre de Reynolds augmente au delà de 60, *on obtient*

un nouveau régime de mouvement dans lequel le liquide se partage en masses se déplaçant chacune pour son compte et limitées par des frontières assez nettement définies.

Dans l'un des cas observés, une de ces frontières avait la forme d'une poche, approximativement en forme de cylindre de révolution dont une base coïncide avec le disque et dont l'autre base se trouve à une distance de l'ordre du rayon. A l'intérieur, le mouvement du fluide rappelait beaucoup le tourbillon en forme de tore qui se produit dans le sillage d'un disque circulaire formant obstacle dans un courant uniforme normal. Dans la région où la poche se raccordait au disque, se trouvaient une ou plusieurs surfaces, en forme d'anneau, entourant la frontière; le liquide à l'intérieur de chacune de ces surfaces est animé d'un mouvement où prédomine une rotation s'effectuant dans un plan méridien du disque.

Les frontières s'organisent d'autant plus lentement que le nombre de Reynolds est plus voisin de 60. Le passage du premier régime au deuxième s'effectue pratiquement toujours pour $\frac{\omega R^2}{\nu} = 60$, que l'on fasse varier dans les oscillations du disque l'amplitude ou la fréquence.

3. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, les masses limitées par les diverses frontières sont projetées tangentiellement; on est en présence d'un véritable régime turbulent.

On rapprochera les résultats précédents de ceux relatifs aux diverses apparences du sillage d'un obstacle dans un courant uniforme : pseudo-écoulement de première espèce, tourbillons fixes, et enfin sillage turbulent.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur la valeur des formules de Dunkerley et analogues pour le calcul approché de la première vitesse critique de flexion d'un arbre tournant.* Note [1] de M. **Th. Got**, présentée par M. E. Jouguet.

J'ai montré (*Comptes rendus* du 26 octobre 1931) la possibilité d'établir, même dans des cas compliqués, l'équation aux vitesses critiques de flexion des arbres tournants, et de la résoudre par approximations successives. Pour opérer plus rapidement on a recours depuis longtemps à la formule suivante due à Dunkerley (*Phil. Transactions*, 185, p. 279 à 360) :

$$(1) \qquad \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_a^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_n^2},$$

(1) Séance du 3 novembre 1931.

ω_0 désigne la première vitesse critique de l'arbre sans aucune charge, ω_1, ω_2, ..., ω_n les vitesses critiques résultant de la force centrifuge et du couple gyrostatique de chacun des disques considérés isolément et l'inertie de l'arbre étant négligée. Cette formule qui *se rapporte d'ailleurs uniquement à la vitesse critique la plus basse* s'accorde plus ou moins grossièrement avec l'expérience dans un assez grand nombre de cas, mais il est impossible d'avoir une limite supérieure de l'erreur commise.

Dans ces dernières années différents auteurs, notamment MM. Hahn (*Schweizerische Bauzeitung*, 9 novembre 1918) et Van den Dungen (*Comptes rendus*, 23 juillet 1923), ont attiré l'attention sur certains rapports entre la formule de Dunkerley et les équations exactes. Le but de la présente Note est de montrer que, malgré l'exactitude de certaines de leurs remarques, il n'y a pas lieu d'attacher à la formule plus de valeur que son auteur lui-même, et que les formules analogues proposées à la suite de la constatation de ces rapports sont encore moins satisfaisantes.

L'équation aux vitesses critiques ω est une équation en ω^2 :

$$1 + A_1\omega^2 + A_2\omega^4 + \ldots = 0, \tag{2}$$

le premier membre étant un *polynome* entier dans le cas de charges concentrées, une *fonction entière* s'il y a des charges continues et notamment si l'on tient compte de l'inertie de l'arbre.

Dans le premier cas, M. Hahn remarque que, $-A_1$ étant égal à

$$\sum_i (m_i \eta_{ii} - I'_i \mu'_{ii}) \quad (^1),$$

les différents termes de cette somme *sont égaux aux inverses des carrés des vitesses critiques* Ω_i *et* Ω'_i qui résulteraient de la seule action de la masse ou de l'inertie transversale correspondantes, toutes les autres étant supprimées — en admettant toutefois, pour simplifier le langage, des valeurs *purement imaginaires* pour les Ω'_i (Ω_i et Ω'_i étant données par les équations

$$1 - m_{ii}\eta_{ii}\Omega_i^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 1 + I'_i \mu'_{ii}\Omega_i'^2 = 0$$

où les coefficients de Ω_i^2 et de $\Omega_i'^2$ sont positifs). Si l'on néglige alors les

---

(1) m_i, masse concentrée à l'abscisse x_i, I'_i, excès du moment d'inertie axial sur le moment d'inertie diamétral du disque à l'abscisse x_i, η_{ii} coefficient d'influence sur la flèche d'une force normale unitaire, μ'_{ii} coefficient d'influence d'un moment unitaire sur la pente de l'élastique.

termes en ω^4 etc., l'équation se réduit à

$$1 + A_1\omega^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad \frac{1}{\Omega^2} = \sum_i \frac{1}{\Omega_i^2} + \sum_i \frac{1}{\Omega_i'^2}.$$

Cette formule est analogue à celle de Dunkerley. Mais on n'a pas fait suffisamment remarquer *qu'elle en diffère essentiellement dès que l'inertie transversale entre en jeu* ($I_i' \neq 0$). En effet dans la formule de Dunkerley (1), les vitesses ω_i sont les vitesses critiques résultant de l'action *simultanée* de la force centrifuge et du couple gyrostatique : ce sont les racines positives des équations

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 1 - m_{ii}\eta_{ii}\omega_i^2, & I_i'\mu_{ii}\omega_i^2 \\ -m_{ii}\eta_{ii}'\omega_i^2, & 1 + I_i'\mu_{ii}'\omega_i^2 \end{vmatrix} = 0.$$

et *l'on n'a pas*

$$\frac{1}{\omega_i^2} = \frac{1}{\Omega_i^2} + \frac{1}{\Omega_i'^2}.$$

L'équation (4) ayant ses racines en ω_i^2 de signes contraires, si l'on appelle ω_i' la racine purement imaginaire, on a

$$\frac{1}{\omega_i^2} + \frac{1}{\omega_i'^2} = \frac{1}{\Omega_i^2} + \frac{1}{\Omega_i'^2}$$

d'où

$$\frac{1}{\omega_i^2} > \frac{1}{\Omega_i^2} + \frac{1}{\Omega_i'^2}$$

et par suite, en additionnant toutes les inégalités analogues,

$$\frac{1}{\omega^2} > \frac{1}{\Omega^2}, \qquad \omega < \Omega,$$

de sorte que *la valeur ω de Dunkerley donne toujours plus de sécurité que celle de Hahn*. D'ailleurs la valeur Ω peut être infinie et même imaginaire, c'est-à-dire qu'elle peut n'être d'aucune utilité pour avoir une valeur approchée de la plus basse vitesse critique *qui existe toujours réellement*. Ces résultats n'ont rien de surprenant, la valeur $-\frac{1}{A_1}$ prise pour valeur du carré de la plus petite racine positive de l'équation (1) n'ayant aucune raison d'être particulièrement approchée. En réalité $-A_1$ est la somme des inverses des racines λ de l'équation (1) en ω^2 :

$$-A_1 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}.$$

Si λ_1 est la plus petite racine positive de cette équation, la formule (3) de M. Hahn ne donne donc une bonne approximation que si, pour une raison ou pour une autre, $\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}$ est petit vis-à-vis de $\frac{1}{\lambda_1}$.

Des remarques analogues s'appliquent au cas des charges continues où l'équation (2) est (Van den Dungen) l'équation déterminante $D(\lambda) = 0$ d'une équation de Fredholm. Mais ici il faut faire attention que $D(\lambda)$ est une fonction entière qui peut être de *genre* 0, 1 ou 2, et que *c'est seulement dans le cas où le genre est nul* que l'on a

$$-\lambda_1 = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}.$$

ASTRONOMIE. — *Sur la répartition des pôles des orbites des étoiles doubles.* Note [1] de M. **D. Barbier**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Cette question qui, en raison de son importance, a fait l'objet de nombreuses recherches, n'a conduit jusqu'ici qu'à des résultats très incertains et contradictoires [2].

Il y a en effet une difficulté provenant, dans le cas général, de l'indétermination du signe de l'inclinaison, ce qui donne deux pôles, dont l'un ne correspond à rien de réel. Toutefois, si l'inclinaison est de $\frac{\pi}{2}$, les deux pôles sont symétriquement opposés sur la sphère céleste. C'est de ce cas particulier que nous nous occupons ici en faisant appel aux étoiles dont l'orbite est inconnue, mais dont on sait que l'inclinaison est voisine de $\frac{\pi}{2}$, ce qui se reconnaît à ce caractère que la trajectoire apparente est rectiligne, son prolongement passant par l'étoile principale. Pour un couple quelconque, soient V l'angle de la tangente à la projection de la trajectoire avec la projection du rayon vecteur, θ et ρ l'angle de position et la distance. On a

$$\cot V = \frac{d\rho}{\rho\, d\theta}.$$

---

(1) Séance du 3 novembre 1931.

(2) Ces recherches sont résumées par Y. C. Chang : *A study of the orientation of the orbits planes of* 16 *visual binaries having determinate inclinations* (*Astronomical Journal*, 40, 1929, p. 11).

Nous ne retenons que les étoiles pour lesquelles $\cot V > 8$. Nous en avons trouvé 74 dans la liste de Russell ([1]).

Soient α, δ les coordonnées équatoriales de l'étoile, α_0, δ_0 celles du pôle. On a

$$\sin\delta_0 = \sin\theta\cos\delta,$$
$$\cos\delta_0\cos(\alpha - \alpha_0) = -\sin\theta\sin\delta,$$
$$\cos\delta_0\sin(\alpha - \alpha_0) = \cos\theta.$$

On obtient ensuite les coordonnées galactiques λ_0, β_0 du pôle à l'aide de tables ([2]). Nous prenons le pôle dont la longitude est comprise dans l'intervalle $-90° \to 0° \to +90°$.

Même si les angles de position sont effectivement répartis au hasard, la distribution des pôles des orbites sur la sphère céleste ne sera pas, en général, uniforme. Puisque $i = \frac{\pi}{2}$, elle dépend de la répartition des étoiles elles-mêmes; mais il est aisé de calculer ce qu'elle doit être. Soient θ_g l'angle de position compté à partir du nord galactique, λ et β les coordonnées galactiques d'une étoile. On a

$$\sin\beta_0 = \sin\theta_g\cos\beta,$$
$$\cos\beta_0\cos(\lambda - \lambda_0) = -\sin\theta_g\sin\beta,$$
$$\cos\beta_0\sin(\lambda - \lambda_0) = \cos\theta_g.$$

d'où l'on tire

$$\theta_g = \text{arc sin}\frac{\sin\beta_0}{\cos\beta}, \quad \beta_0 < \frac{\pi}{2} - \beta;$$

$$\theta_g = \text{arc tang}\frac{\cot(\lambda_0 - \lambda)}{\sin\beta},$$

Toutes les valeurs de θ_g étant, *a priori*, également probables, on obtient la probabilité p_{mn} pour que β_0 soit compris entre β_m et β_n et la probabilité q_{rs} pour que λ_0 soit compris entre λ_r et λ_s

$$\frac{\pi}{2}p_{mn} = \text{arc sin}\frac{\sin\beta_m}{\cos\beta} - \text{arc sin}\frac{\sin\beta_n}{\cos\beta},$$

$$\pi q_{rs} = \text{arc tang}\frac{\cot(\lambda_r - \lambda)}{\sin\beta} - \text{arc tang}\frac{\cot(\lambda_s - \lambda)}{\sin\beta}.$$

Remarquons que si $\frac{\sin\beta_m}{\cos\beta} > 1$, on doit remplacer cette expression par

(1) H. N. Russell and C. E. Moore, *Dynamical parallaxes of 1777 double stars* (*Astronomical Journal*, 39, 1929, p. 165).

(2) Pio Emannuelli, *Publicazioni della Specula Vaticana*. 14, appendice I, 1929.

l'unité. La probabilité comprise pour que les deux conditions ci-dessus soient simultanément réalisées est

$$P_{mnrs} = \frac{p_{mn} q_{rs}}{\Sigma (p_{mn} q_{rs})},$$

la somme étant étendue à toute la sphère céleste.

Nous avons calculé pour chaque étoile les p, q, P qui nous sont nécessaires ; en faisant la somme pour toutes les étoiles, on trouve la distribution des pôles correspondant à une égale probabilité pour toutes les valeurs de θ_g, distribution qu'il reste à comparer au dénombrement des 74 étoiles que nous considérons.

Répartition des latitudes des pôles.

β.....	—90°, —41°,7.	—41°,7, —19°,5.	—19°,5, 0°.	0°, +19°,5.	+19°,5, +41°,7.	+41°,7, +90°.
Observation.	9,0	9,0	16,0	16,0	13,0	11,0
Calcul.....	12,71	12,77	11,52	11,52	12,77	12,71
O—C......	— 3,71	— 3,77	+ 4,48	+ 4,48	+ 0,23	— 1,71

Il y a une concentration assez nette entre — 19°,5 et + 19°,5 et la probabilité pour qu'une telle concentration n'ait pas de causes réelles est seulement de 0,09.

Répartition des longitudes des pôles.

λ......	—90°, —60°.	—60°, —30°.	—30°, 0°.	0°, +30°.	+30°, +60°.	+60°, +90°.
Observation..	11,0	17,0	14,0	11,0	9,0	12,0
Calcul.......	11,76	11,00	12,24	14,86	12,27	11,87
O—C.........	— 0,76	+ 6,00	+ 1,76	— 3,86	— 3,27	+ 0,13

Il y a concentration entre 0° et — 60° et la probabilité pour que cette concentration ne soit pas réelle est de 0,09. Enfin en répartissant les pôles sur la sphère céleste divisée en 12 régions, nous avons trouvé qu'il y avait concentration dans les quatre régions entourant le point $\lambda = -30°$, $\beta = 0$, la probabilité pour que cette concentration soit réelle étant d'ailleurs de 0,95. Ce point est très voisin de la direction du centre de la galaxie qui a pour coordonnées

$$\lambda = 325°, \qquad \beta = 0°.$$

ÉLECTRICITÉ. — *Conductibilité thermique des gaz rares.* Note [1] de MM. **Maurice Curie** et **A. Lepape**, présentée par M. Jean Perrin.

Nous avons mesuré les conductibilités thermiques du krypton et du xénon, qui n'avaient pas encore été déterminées. Nous avons aussi mesuré à nouveau les conductibilités thermiques des autres gaz rares (hélium, néon, argon), de manière à réaliser un ensemble permettant, en particulier, de voir s'il n'existerait pas une variation systématique nette du coefficient numérique A de la formule $K = A\eta c_v$, reliant le coefficient de conductibilité thermique K, le coefficient de viscosité η et la chaleur spécifique c_v.

Nous avons opéré par la méthode du refroidissement thermométrique, plus simple de bonne mise en œuvre que la méthode du fil de platine de Schleiermacher. Pour l'air, les résultats obtenus suivant l'une ou l'autre méthode par divers expérimentateurs ne présentent pas de différences systématiques.

La méthode du refroidissement thermométrique a été étudiée avec beaucoup de soin par E. Müller [2]. Le dispositif que nous avons employé est très voisin de l'un de ceux préconisés par cet expérimentateur.

Le réservoir thermométrique était une boule en verre mince de 10^{mm} de diamètre; la tige capillaire avait 1^{mm} de diamètre extérieur et 15^{cm} de long. La boule était placée au centre d'un ballon de verre mince de 65^{mm} de diamètre environ, très régulier, plongé dans de la glace rapée.

Le gaz était à une pression comprise entre 5 et 10^{mm}. A ces pressions et dans les conditions expérimentales, l'effet de convection n'est pas sensible (indépendance d'avec la pression). La marche du thermomètre était suivie entre 40 et 20°.

Le coefficient de conductibilité thermique est proportionnel à la différence des vitesses de refroidissement en présence et en l'absence de gaz. Le coefficient de proportionnalité dépend des dimensions de l'appareil et de la valeur en eau de la boule.

Pour la correction de vitesse de refroidissement en l'absence de gaz, nous avons opéré selon les indications de la technique moderne du vide.

D'autre part nous avons renoncé à employer la méthode du refroidissement thermométrique comme méthode absolue, à cause de la difficulté de détermination précise de la masse en eau.

Nos déterminations sont rapportées à la base K_0 air [3] $= 5,83.10^{-5}$

---

(1) Séance du 3 novembre 1931.

(2) E. Müller, *Annalen der Physik*, 60, 1897, p. 83.

(3) Grégory et Archer, *Proceed. Roy. Soc.*, 753, 1926, p. 91.

$cal\,sec^{-1}\,cm^{-1}\,deg^{-1}$. Les résultats que nous avons obtenus sont groupés dans le tableau suivant :

Gaz.	Coefficient de conductibilité thermique à 0°C. K_0 en $cal\text{-}sec^{-1}\ cm^{-1}\text{-}deg^{-1}$.	$A = \frac{K_0}{\eta c_v}$.
Hélium	$33{,}63.10^{-5}$	2,42
Néon	10,92	2,49
Argon	4,06	2,59
Krypton	2,12	2,54
Xénon	1,24	2,58

Les valeurs de K_0 pour l'hélium, le néon, l'argon sont en accord convenable avec les déterminations antérieures.

Les valeurs du coefficient A sont voisines de la valeur $\frac{5}{2}$ déduite de l'hypothèse d'intervention dans la dynamique des chocs élastiques entre molécules, d'une force répulsive à faible rayon d'action, en $\frac{1}{d^n}$ ($n \geq 5$, Maxwell, Boltzmann, M. Brillouin, Chapman, Enskog).

OPTIQUE PHYSIQUE. — *Sur la biréfringence par compression de la silice amorphe et du quartz cristallisé, et sa dispersion dans l'ultraviolet.* Note de MM. G. **Bruhat** et J. **Thouvenin**, présentée par M. A. Cotton.

Nous avons décrit [1] un compensateur formé de deux quartz perpendiculaires droit et gauche, qu'on peut rendre quart d'onde pour une radiation quelconque du spectre visible ou du spectre ultraviolet en lui donnant une inclinaison convenable par rapport au faisceau lumineux. Nous l'avons utilisé à l'étude de la biréfringence par compression de la silice fondue et du quartz cristallisé. La compression était exercée à l'aide d'un poids et d'un levier; elle a varié de 30 à 200 kg/cm^2; la biréfringence était mesurée par la méthode de Stokes, les pointés étant faits par la méthode photographique de Bruhat et Pauthenier.

Nous avons d'abord étudié un échantillon de silice fondue (Silice I), de largeur $10^{mm},20$ et d'épaisseur $5^{mm},09$, provenant de la maison *Quartz et Silice fondus*. Cet échantillon, assez bon au point de vue optique, présentait, sans compression, une biréfringence résiduelle dont la valeur moyenne

(1) G. Bruhat et J. Thouvenin, *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 727.

dans la plage utilisée était inférieure à 1°; les biréfringences mesurées φ ont varié, suivant la longueur d'onde et la pression, de 50° à 424°; la précision dss pointés était de 15 à 30 minutes. Nous avons contrôlé les mesures faites avec le quart d'onde par des mesures faites sans quart d'onde, dans lesquelles nous cherchions quelle était la valeur de la force qui rendait rectiligne la vibration émergente, en rendant la lame demi-onde ($\varphi = 180°$) ou onde ($\varphi = 360°$). Nous avons trouvé que, pour une longueur d'onde donnée, la biréfringence φ était bien proportionnelle à la pression; les rapports φ/F de la biréfringence à la force de compression sont certainement déterminés avec une erreur qui ne dépasse pas 1 pour 100.

En multipliant ces rapports par la largeur en centimètres du bloc de silice comprimée, on obtient la biréfringence Φ que prendrait une lame d'un centimètre d'épaisseur comprimée sous une pression de 1 kg/cm² : nous donnons, dans le tableau que l'on trouvera plus loin, les valeurs en degrés de Φ pour les diverses longueurs d'onde. Nous y donnons également la quantité $C = 10^{13}(n_0 - n_e)$, la différence des indices $n_0 - n_e$ étant celle qui correspond à une pression de 1 barye ([1]). Tous ces nombres correspondent à des biréfringences négatives : dans tous les échantillons, de silice fondue ou de quartz cristallisé, que nous avons étudiés, la vibration parallèle à la direction de compression est avancée.

Nous avons ensuite étudié un second échantillon de silice fondue (Silice II), provenant de la maison Schmidt et Hænsch. Cet échantillon, moins bon que le précédent, présentait une biréfringence résiduelle deux ou trois fois plus grande; nous nous sommes contentés, pour la plupart des radiations, de déterminer la valeur de la pression qui le rend demi-onde, et nous en avons déduit les valeurs de Φ et de C portées dans le tableau.

Les échantillons de quartz cristallisé étudiés étaient des lames perpendiculaires à l'axe, taillées par la maison Jobin et Yvon, de 10^{mm} de largeur et 2^{mm} d'épaisseur. Pour éliminer l'influence du pouvoir rotatoire. nous avons comprimé ensemble une lame droite et une lame gauche. Nous donnerons dans un autre Recueil les raisons qui nous ont fait préférer ce dispositif, ainsi que sa théorie et la discussion des causes d'erreur; nous nous contenterons ici d'indiquer que les pointés sont meilleurs que pour la silice fondue, à cause de la meilleure qualité optique de la matière. L'erreur

---

([1]) La quantité C est ainsi exprimée en brewsters; le brewster étant un retard de 1 angström par millimètre et par mégabarye.

d'un pointé photographique ne dépasse pas 10 minutes, et il semble que les valeurs de Φ et de C que nous donnons dans le tableau suivant devraient être exactes à 1 ou 2 pour 100 près; elles présentent pourtant, par rapport à la courbe moyenne, des écarts un peu supérieurs.

L'ensemble de nos résultats est résumé par le tableau suivant :

λ (angströms)...	5780.	5461.	4358.	3657.	3128.	2804.	2537.	2400.
			Silice I (degrés-cm/kg.10^{13} C. G. S.).					
Φ............	2,31	2,48	3,04	3,76	4,68	5,56	6,35	7,07
C............	3,79	3,83	3,75	3,90	4,15	4,42	4,56	4,81
k............	4,36	4,37	4,16	4,16	4,25	4,34	4,28	4,37
			Silice II (degrés-cm/kg.10^{13} C. G. S.).					
Φ............	2,49	2,64	3,33	4,10	4,99	—	6,60	—
C............	4,08	4,09	4,11	4,25	4,42	—	4,74	—
k............	4,67	4,66	4,55	4,54	4,52	—	4,45	—
			Quartz (degrés-cm/kg.10^{13} C. G. S.).					
Φ............	—	1,71	1,96	2,80	—	3,58	4,84	—
C............	—	2,64	2,43	2,90	—	2,84	3,48	—

L'examen de ce tableau montre que *les deux échantillons de silice fondue présentent des biréfringences de compression très comparables, ne différant entre elles que de 5 à 6 pour* 100, *mais que cette biréfringence est supérieure d'environ* 40 *pour* 100 *à la biréfringence de compression du quartz cristallisé.*

Nous avons comparé les résultats obtenus pour la biréfringence de compression de la silice fondue à la formule de Havelock; d'après cette formule la biréfringence d'un échantillon donné devrait varier, avec la longueur d'onde, proportionnellement à $\frac{(n^2-1)^2}{n}$: nous donnons dans le tableau les valeurs de la constante de Havelock, $k=\frac{Cn}{(n^2-1)^2}$, pour les différentes mesures faites sur la silice fondue. On voit que, pour un même échantillon, les valeurs correspondant aux diverses longueurs d'onde présentent, par rapport à la valeur moyenne, des écarts de l'ordre de 2 à 3 pour 100, qui nous paraissent supérieurs aux erreurs d'expérience. *La formule de Havelock, qui donne correctement l'ordre de grandeur de la dispersion de biréfringence, ne doit être considérée que comme une première approximation.*

ÉLECTROCHIMIE. — *Coefficient d'activité de l'ion cuivre bivalent dans les solutions de son sulfate.* Note [1] de Mlle **M. Quintin**, présentée par M. J. Perrin.

Debye a établi que, pour des solutions très diluées, le coefficient d'activité γ d'un ion de valence ν est lié à la concentration m par la relation

$$\text{Log}\,\gamma = -B\nu^2\sqrt{\Sigma m\nu^2}. \tag{1}$$

Lorsque le diamètre moyen α de collision des ions n'est pas négligeable devant l'épaisseur de l'atmosphère ionique, la formule (1) doit être remplacée par

$$\text{Log}\,\gamma = -B\nu^2\sqrt{\Sigma m\nu^2}\,\frac{1}{1+A\alpha\sqrt{\Sigma m\nu^2}}, \tag{2}$$

où

$$A = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{1000\,DKT}} \quad \text{et} \quad B = \frac{e^2}{2\,DKT}\sqrt{\frac{4\pi N e^2}{1000\,DKT}},$$

N représentant le nombre d'Avogadro, K la constante de Boltzmann, e la charge de l'électron, D la constante diélectrique du solvant et T la température absolue.

J'ai cherché à vérifier ces formules pour les solutions de SO^4Cu. Celles-ci étaient préparées à partir de sel purifié par plusieurs cristallisations successives et d'eau bidistillée; le pH de la solution mère initiale, demi-moléculaire, était égal à 3,3 à la température des expériences, soit 17° C.

Dans ces conditions, en prenant pour D la valeur de Drude (81,70), les formules (1) et (2) deviennent (logarithmes vulgaires) :

$$\log\gamma = -4,05\sqrt{m}, \tag{1'}$$

$$\log\gamma = -4,05\sqrt{m}\,\frac{1}{1+0,653\times10^8\,\alpha\sqrt{m}}. \tag{2'}$$

Le coefficient d'activité de l'ion Cu^{++} était déterminé à partir du potentiel E d'une électrode de cuivre pur, par mesure de la force électromotrice de la chaîne :

$$Cu \mid SO^4Cu,\ m \mid (NO^3)^2NH^4\ \text{sat.} \mid KCl\ \text{sat.} \mid Hg^2Cl^2 \mid Hg.$$

Si l'on néglige les potentiels de jonction des liquides :

$$E = \left(E_0 + \frac{RT}{2F}\,\text{Log}\,\gamma\right) + \frac{RT}{2F}\,\text{Log}\,m. \tag{3}$$

---

[1] Séance du 27 juillet 1931.

E_0 se détermine par la méthode de Lewis : la quantité E'_0 entre parenthèses est calculée pour chaque valeur de m et l'on construit la courbe $E'_0 = f(\sqrt{m})$ qui, pour les grandes dilutions, est une droite. E_0 étant la limite de E'_0 pour $m = 0$ s'obtient par extrapolation.

Logγ est alors calculé par la relation (3).

Le tableau I donne les valeurs expérimentales de E (en volts, reproductibles à 10^{-3} volt près), à partir desquelles E'_0 et $\log\gamma$ sont calculés comme il vient d'être indiqué.

TABLEAU I.

mol. gr/litre.	E.	E'_0.	$\log\gamma$.
1/2	0,332	0,340	—1,015
1/8	0,321	0,347	—0,772
1/32	0,311	0,354	—0,529
1/128	0,300	0,360	—0,296
1/512	0,286	0,365	—0,139

$E_0 = 0,369$.

Les courbes représentant la variation de E'_0 et de $\log\gamma$ en fonction de $\sqrt{m}$ sont régulières et admettent, comme le veut la théorie, une tangente à l'origine, de coefficient angulaire égal à 0,115 pour la première et à $-4,05$ pour la seconde [relation (1')]. La courbe $\log\gamma = F(\sqrt{m})$ n'est pas une droite; il faut donc tenir compte pour SO^4Cu du diamètre ionique α qui peut être calculé par la formule (2').

Le tableau II donne les valeurs de α calculées à partir des valeurs de $\log\gamma$ interpolées sur la courbe $\log\gamma = F(\sqrt{m})$.

TABLEAU II.

m.	$\log\gamma$.	$\frac{-4,05\sqrt{m}}{\log\gamma}$.	α en Å.
0,01	—0,33	1,227	3,5
0,0225	—0,47	1,293	3,0
0,04	—0,575	1,409	3,1
0,0625	—0,655	1,546	3,2
0,09	0,72	1,687	3,5
0,1225	—0,775	1,787	3,2
0,16	—0,820	1,977	3,7
0,2025	—0,867	2,102	3,6
0,25	—0,905	2,238	3,8
0,3025	—0,942	2,365	3,8
0,36	—0,975	2,493	3,8
0,4225	—1,005	2,619	3,8
0,49	—1,035	2,737	3,8
0,5625	—1,062	2,879	3,8

Si l'on élimine les premières valeurs pour lesquelles les causes d'erreur sont particulièrement sensibles (les différences de potentiel aux jonctions entre liquide ayant été négligées), on trouve pour diamètre moyen des ions en solution de SO^4Cu : 3,8 Å environ.

On voit donc que, dans tout le domaine de concentrations étudiées, c'est-à-dire même jusqu'à des concentrations relativement élevées, la théorie de Debye s'applique aux solutions de SO^4Cu, si l'on tient compte du facteur de correction introduit par la dimension des ions.

RADIOACTIVITÉ. — *Sur les rayons α de long parcours émis par le* ThC + C′ *et quelques déterminations de vitesses de rayons α*. Note de M. S. **Rosenblum**, présentée par M. A. Cotton.

Récemment E. Rutherford, Wynn Williams et Lewis ont repris la question des rayons α de long parcours par la nouvelle méthode d'ionisation différentielle établie par ces auteurs ([1]). En ce qui concerne le dépôt actif du Th, ils confirment l'existence de deux longs parcours seulement de 11,5 et $9^{cm},7$ (air à pression normale et à 15°).

L'énergie correspondant aux groupes de long parcours se calcule par extrapolation en partant de courbes empiriques représentant la relation entre les vitesses et les parcours normaux ([2]).

Il était désirable de mesurer directement la vitesse de ces rayons α, qui correspondent à l'émission d'énergie la plus élevée que l'on peut observer. Malgré le petit nombre de rayons α appartenant au groupe 11,5 (il en existe environ 2 pour 10000 de parcours normal), nous avons pu déterminer à l'aide du grand électro-aimant de l'Académie des Sciences, la vitesse correspondant à ce groupe (par la méthode de focalisation magnétique).

Nous avons ainsi obtenu sur trois clichés une nouvelle raie α_I, distante de $3^{cm},48$ à partir de la raie α du ThC′; la vitesse correspondante est, en prenant la raie α du ThC′ comme unité, égale à

$$\frac{V_{\alpha_1}}{V_\alpha \mathrm{ThC'}} = 1,098\,(7).$$

([1]) E. Rutherford, Wynn Williams et Lewis, *Proc. Roy. Soc.*, (A), 133, 1931, p. 684.

([2]) En effet, l'application simple de la loi de Geiger, $P = kv^3$, où P sont les parcours dans un gaz à température et pression définies, et v les vitesses, peut, dans le domaine des longs parcours, conduire à des erreurs notables.

Sur un de nos clichés, nous avons également observé une raie α_{II} extrêmement faible distante de $1^{cm},3$ et dont la vitesse est

$$\frac{V_{\alpha_{II}}}{V_\alpha \text{Th C}'} = 1,037.$$

La raie α_I correspond certainement au groupe de $11^{cm},5$; en ce qui concerne α_{II}, dont l'existence ne nous semble pas définitivement établie, elle correspondrait au groupe de $9^{cm},7$ qui est cinq fois environ plus faible que le groupe de $11^{cm},5$. L'intensité de ce groupe est donc seulement de $\frac{3}{1000000}$ par rapport à la raie principale du Th C'. Rutherford et ses collaborateurs trouvent, par extrapolation, pour ce groupe

$$\frac{V_p 9,7}{V_\alpha \text{Th C}'} = 1,0403,$$

ce qui est en accord satisfaisant avec notre valeur de 1,037. On trouve pour les différences énergétiques

$$E_{\alpha_I} - E_\alpha \text{Th C}' = 1827 \pm 40 \text{ E}k\text{V}$$

et

$$E_{\alpha_{II}} - E_\alpha \text{Th C}' = 663 \text{ E}k\text{V}$$

[pour effectuer les calculs, on admet

$$V_\alpha \text{Th C}' = 2,056 \times 10^9 \text{ cm-sec},$$

moyenne entre le nombre donné par Briggs (1) et celui déterminé par nous-même, par comparaison avec la vitesse des rayons α du RAC' (2)].

Ces expériences ont été effectuées avec un dispositif déjà décrit (2) précédemment et dans des conditions expérimentales analogues. Pour ces expériences, nous avons pu utiliser des sources de ThB équivalentes en rayonnement γ à 10-14 millicuries de radium élément. La durée des poses était de 5 à 6 heures.

Au cours de nos expériences, nous avons eu également l'occasion de déterminer la vitesse des rayons α de l'Ac et de l'AcC' en photographiant simultanément sur le même cliché les rayons α du radium C', dont la vitesse est d'après Briggs (3) de $1,923.10^9$ cm/sec.

---

(1) *Proc. Roy. Soc.*, (A), **118**, 1928, p. 549.
(2) S. Rosenblum, *Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 1124.
(3) *Loc. cit.*

Nous trouvons

$$V_\alpha AcC' = 1,893 . 10^9 \text{ cm/sec},$$
$$V_\alpha AcC = 1,782 . 10^9 \text{ cm/sec}.$$

[Il s'agit du groupe principal de l'AcC (1).]

Admettant une erreur de 1 pour 1000 sur la vitesse des rayons α du RaC', les nombres donnés pour l'AcC' et l'AcC sont à la précision de $\frac{2}{1000}$.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Variation du point de décongélation des huiles minérales accompagnant des changements de leur état. Trempe des huiles.* Note de M. **Paul Woog**, M[lles] **Émilie Ganster** et **Fanny Coulon**, présentée par M. M. Brillouin.

L'un de nous a indiqué (2) une méthode et un dispositif permettant d'obtenir dans des conditions clairement définies le point de décongélation des corps gras, c'est-à-dire la température à laquelle l'échantillon préalablement congelé à fond, puis réchauffé progressivement, passe, sous une charge donnée, d'une viscosité infinie à une viscosité déterminée, encore très grande, mais appréciable. Les mesures se sont montrées fidèles, si bien qu'il nous a été possible de mettre en évidence certaines anomalies présentées par les huiles minérales et plus encore par les mélanges qui les renferment, telles les huiles employées en chronométrie.

En effet, si l'on congèle l'huile à — 85° environ en la plongeant rapidement dans de l'acétone additionnée d'un excès de neige carbonique, puis qu'après un séjour de 5 minutes à cette température, on porte l'essai dans des bains réglés (pour les huiles sur lesquelles nous avons opéré), soit à — 30°, soit à — 40° et que l'on observe alors le point de décongélation obtenu à la suite du réchauffement progressif de ces bains, on constate un écart très net entre les nombres obtenus. Les différences, parfois faibles, sont capables cependant d'atteindre près d'une dizaine de degrés. Entre essais comparatifs, les températures de décongélation obtenues dans des bains de réchauffement ajustés à — 30° à l'origine sont, d'une manière à peu près constante, plus basses que si l'on opère dans des bains à — 40°. Une congélation initiale soutenue 30 minutes à — 85° avant de réchauffer l'échantillon, laisse entiè-

(1) M[me] P. Curie et S. Rosenblum, *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 33.

(2) Paul Woog, *Annales de l'Office national des Combustibles liquides*, 3, 1929, p. 493.

rement subsister des variations du point de décongélation sous l'influence de la température de départ différente des bains de réchauffement (— 30° ou — 40°); mais si la congélation à — 85° est maintenue 1 heure, on ne retrouve plus ces différences avec la même régularité. Ces variations disparaissent si la congélation a lieu dans l'air liquide. Si après la congélation à — 85°, on maintient l'essai dans ce même bain qu'on laisse alors se réchauffer, on observe des températures de décongélation très voisines entre mesures successives, mais toujours moins basses encore que les températures fournies à partir du bain à — 40°. Une congélation de l'échantillon effectuée en abaissant la température avec une extrême lenteur supprime les anomalies : on obtient dans ce cas le point le plus élevé.

Soupçonnant une transformation cristalline des huiles, nous avons, sans succès, ébauché une analyse thermique du phénomène. Par ailleurs, dans des essais successifs, nous avons maintenu l'huile congelée pendant un temps croissant à —30° avant de laisser le bain se réchauffer pour la recherche du point de congélation : nous avons alors constaté que ce point se relevait peu à peu, et que, après un séjour de 12 minutes environ à —30°, la courbe des températures de décongélation ainsi tracée rejoignait le niveau des points obtenus dans le bain réglé à —40°, mettant ainsi bien en évidence une zone de transformation.

Par une autre expérience, nous avons retrouvé la modification inverse : l'huile congelée ayant été assez longtemps maintenue à —30° pour que la transformation soit effectuée, était congelée à nouveau puis réchauffée, ce double traitement étant répété plusieurs fois de suite en laissant l'échantillon atteindre à chaque cycle une température un peu plus élevée. On voyait alors la température de décongélation décroître à chaque essai et regagner finalement le point initial.

Nous avons reproduit le phénomène dans un tube de verre de manière à pouvoir l'observer. Nous avons constaté qu'au moment de la congélation rapide — principalement pour les huiles asphaltiques et naphténiques — l'huile se solidifiait sous l'aspect d'un verre transparent, incolore dans le cas des huiles très raffinées, tandis qu'une forte incurvation de la surface se manifestait sous l'effet de la contraction. Ce verre se fêle souvent en produisant un bruit sec ; ces ruptures deviennent nombreuses si la congélation a lieu dans l'air liquide. En laissant la température remonter lentement, on voit une transformation s'amorcer, donnant à l'huile un léger louche. Cette opalescence a paru plus nette si l'équipage est suspendu par le thermomètre et si l'huile est soumise à une traction correspondant au

poids de l'appareil. Dans les mélanges d'huiles minérales et de glycérides, le verre se forme d'abord, puis les glycérides cristallisent peu à peu, donnant à l'ensemble un aspect de porcelaine.

Nous avons vérifié que l'état d'hydratation de l'huile n'intervenait pas dans le phénomène.

Il semble donc que les points de décongélation différents observés correspondent à des états variables de l'huile. Certains faits de cet ordre, montrés par des triglycérides en surfusion sont connus; mais ici le phénomène général mis en évidence semble analogue à une véritable *trempe* suivie de *recuit*. La solidification rapide de l'huile ne donne pas aux cristaux le temps de se former; l'état vitreux réalisé est instable, et, dès que le relèvement de la température le permet, des cristaux — stables — apparaissent, puis se multiplient. Suivant le temps qui s'écoule entre l'amorçage de la cristallisation et le moment où se produit la décongélation, on obtient des points de décongélation différents. La forme vitreuse ayant la température de fusion la plus basse, on observe des points de décongélation d'autant plus hauts que la cristallisation de l'huile est plus avancée. Ces points sont minima dans le bain à -30° et maxima quand le réchauffement se fait à partir de -85°, la durée de l'opération permettant, dans ce cas, une dévitrification plus poussée.

Comme l'amorçage ne s'effectue pas à un point fixe, les températures de décongélation peuvent subir quelques irrégularités. Celles-ci sont réduites au minimum en laissant l'huile congelée se réchauffer à partir de -85° et en opérant, suivant les données connues, sur des échantillons préalablement chauffés à $+50^{\circ}$ et refroidis à $+20^{\circ}$ pendant une demi-heure, juste avant de procéder à la congélation.

L'étude optique et cristallographique des phénomènes est entreprise à l'École nationale supérieure du Pétrole.

CHIMIE PHYSIQUE. — *La dégradation des solutions de caoutchouc de diverses concentrations*. Note de MM. **P. Bary** et **E. Fleurent**, présentée par M. G. Bertrand.

Nous avons employé des solutions dans le xylène d'un caoutchouc, type dit crêpes plantation fumés, placées dans une atmosphère d'azote et maintenues à la température à peu près constante de 95° par un régulateur; nous avons opéré simultanément sur des solutions à cinq concentrations différentes : 5,12, 3,94, 2,88, 1,98 et 0,99 pour 100^{cm^3}. Les mesures de

viscosité ont été faites, comme précédemment, par écoulement dans un tube d'environ 1^{mm} de diamètre intérieur.

On a retrouvé ainsi, dans les courbes de la viscosité relative en fonction du temps, la loi hyperbolique déjà décrite (*Comptes rendus*, 192, 1931, p. 946), mais seulement pour les concentrations de 1,98 et 0,99 pour 100. Pour les solutions plus concentrées, la courbe présente un point singulier et peut se décomposer en deux périodes distinctes :

a. Une période de désagrégation du caoutchouc gonflé à l'état de gelée en suspension dans le xylène ; cette période se prolonge d'autant plus que la concentration est plus grande (exemple : 320 heures pour la solution à 5,12 pour 100 et 110 heures pour celle à 2,88 pour 100.

b. Une période de dégradation moléculaire qui succède à la précédente pendant laquelle la viscosité de la solution se rapproche de plus en plus de celle du solvant en suivant la loi hyperbolique précédemment observée.

En outre, pour le xylène il existe une température au delà de laquelle il y a pyrolyse du caoutchouc; ainsi que nous l'avons signalé, dans notre expérience à 140°, cette pyrolyse se manifeste par une coloration brune prise par la solution accompagnée d'une odeur caractéristique. Ces phénomènes ne se produisent pas à 95°. Le début de la pyrogénation dans le xylène commence donc entre ces deux températures.

Les points singuliers des courbes de viscosité des solutions chauffées correspondent à des valeurs de cette dernière et à des durées de chauffage qui sont d'autant plus élevées que la concentration est plus grande. On ne peut donc les attribuer à une anomalie qui disparaîtrait pour une valeur déterminée de l'un ou de l'autre de ces deux facteurs seuls. Il semble ainsi probable que la loi hyperbolique ne commence à représenter correctement la dégradation, quelle que soit la concentration, que lorsque les molécules sont devenues assez petites pour acquérir entre elles une indépendance qu'elles ne possédaient pas avant.

Dans cette seconde période, on peut représenter la viscosité par la formule déjà indiquée

$$\eta - 1 = \frac{A}{t + \theta},$$

les valeurs des paramètres, pour trois des solutions dont le chauffage a été poursuivi assez longtemps, sont les suivantes :

Solution à 5,12 pour 100......	$A = 3658$	$\theta = -181$
» 2,88 »	$A = 1401$	$\theta = -47,6$
» 0,99 »	$A = 92,9$	$\theta = -27,7$

Le chauffage à 95° de ces trois solutions a duré en tout 872 heures. Mais

l'origine de la courbe hyperbolique est située pour chacune d'elles à un nombre d'heures effectives donné par la valeur de θ compté positivement. On est ainsi amené à conclure dans le cas, par exemple, de la solution à 0,99 pour 100, que les déterminations faites avant 27 heures de chauffage appartiennent à la première période. Ceci montre que les mesures de viscosité effectuées dans toutes nos expériences, aprés des temps courts de chauffage, donnent des valeurs trop faibles, même pour les solutions à 2 et 1 pour 100 environ et explique l'existence du point singulier dont, avant d'aller plus loin, nous avons tenu à signaler l'observation.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur une force électromotrice de filtration de valeur anormale.* Note de MM. **L. Riéty** et **G. Salager**, présentée par M. A. Cotton.

L'un de nous (¹) a montré que les forces électromotrices obtenues par écoulement dans un tube de verre ordinaire de solutions de sels mercuriques, chlorure ou cyanure, sont bien plus grandes que celles que donnent les solutions d'autres sels.

Ceci permet d'établir un montage simple, puisqu'on peut utiliser des pressions inférieures à la pression atmosphérique et que l'emploi d'électrodes en mercure permet d'éviter toute complication due à la polarisation des électrodes.

A l'aide d'une trompe à eau on établit à l'une des extrémités d'un tube de verre effilé une pression déterminée. L'autre extrémité plonge dans le liquide soumis à la pression atmosphérique. Le liquide s'écoule sous une pression égale à la différence des deux précédentes. Le tube de verre employé était un tube de verre pyrex, et les solutions, des solutions de cyanure mercurique. Les mesures étaient faites par la méthode ordinaire en utilisant un électromètre capillaire.

Si les conditions d'écoulement satisfont à la loi de Poiseuille la force électromotrice de filtration E est toujours proportionnelle à la pression P sous laquelle le liquide s'écoule. Pour les différentes concentrations C, exprimées en grammes de sel par litre de solution, elle a les valeurs suivantes pour une pression P égale à $74^{cm},5$ de mercure

C.	1.	5.	10.	20.	30.	50.	75.	100.	200.
E (volts)......	3,025	2,015	1,418	0,955	0,875	0,815	0,756	0,691	0,650

(¹) *Comptes rendus*, **180**, 1925, p. 2026.

On voit que dans ce cas le quotient $\frac{E}{P}$ varie suivant la concentration, de quelques volts-atm^{-1} à 0,5 volt-atm^{-1}, alors que pour les autres sels, il est de l'ordre du millivolt-atm^{-1}.

Le chlorure mercurique donne également des f. e. m. anormalement élevées; elles sont environ un quart de celles que donne le cyanure mercurique.

La nature du tube où se produit l'écoulement semble peu intervenir dans le phénomène : le verre ordinaire, le pyrex et le quartz ont donné des résultats du même ordre de grandeur.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Action d'une différence de potentiel continue sur l'acétone et l'éther.* Note de M. **J. Sambussy**, présentée par M. A. Cotton.

La variation en fonction du temps t de l'intensité i du courant qui traverse une colonne d'acétone soumise à une différence de potentiel continue est représentée par l'équation $i - i_\infty = (i_0 - i_\infty)e^{-kt}$, i_0 est l'intensité initiale [1]. L'intensité limite i_∞ est obtenue d'autant plus rapidement que la tension est plus élevée. Je me suis proposé d'étudier cette question de plus près en prenant comme liquide l'acétone et l'éther.

I. — 1° Avec l'acétone on constate que le rapport de la différence de potentiel v appliquée aux électrodes à l'intensité limite i_∞, est constant, la résistance apparente r de la colonne d'acétone est donc bien définie et le courant limite suit la loi d'Ohm. Ainsi, lorsque la différence de potentiel croît de 80 volts à 4000 volts, les valeurs suivantes sont constatées :

v (volts)........	80	160	240	320	400	960	2000	4000
i_∞ (micro-amp.)......	90	180	270	360	450	1072	2258	4508

2° Quand le courant limite i_∞ a été atteint, si l'on supprime la différence de potentiel v et si l'on relie un galvanomètre aux électrodes de la cuve contenant l'acétone, on observe un courant de dépolarisation i_D de sens inverse au courant limite i_∞. Ce courant de dépolarisation présente les caractères suivants : il diminue d'abord rapidement (pendant les vingt premières minutes, par exemple, il est passé de 156.10^{-8} amp. à 75.10^{-8} amp.); puis il a baissé lentement mettant 72 heures pour passer de 75.10^{-8} amp.

---

[1] Reboul et Sambussy, *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 490.

à 35.10^{-8} amp. et ne s'annule qu'au bout de plusieurs jours, les électrodes étant constamment en court circuit; avant de s'annuler le courant de dépolarisation change de sens.

On peut calculer la valeur de la f. e. m. e donnant naissance au courant de dépolarisation i_D. Lorsque le courant limite est obtenu la cellule a une résistance apparente définie par la loi d'Ohm $r = \frac{v}{i_\infty} = \frac{8}{9} 10^6$. D'autre part, si l'on admet, lorsque le courant de dépolarisation prend naissance que la résistance de la cellule n'est pas modifiée, on trouve pour la force électromotrice de polarisation $e = ri_D = \frac{8}{9} 10^6 . 156 . 10^{-8} = 1,4$ volt. Ainsi la polarisation des électrodes serait une polarisation d'origine électrolytique due probablement aux traces d'eau contenues dans l'acétone.

Quant aux particularités que nous venons de signaler elles présentent la plus grande analogie avec celles que l'on met en évidence quand on étudie les courants de dépolarisation d'un électrolyte avec un oscillographe [1].

4° L'étude de la répartition de potentiels au moyen d'électrodes indique une répartition linéaire des potentiels dans la masse du liquide avec des chutes aux électrodes relativement peu importantes (40 volts pour 300 volts appliqués aux électrodes).

II. — Un échantillon d'éther pur et soumis à des tensions variant de 1000 à 6000 volts a présenté les mêmes phénomènes que ceux précédemment décrits : les traces d'eau semblent jouer encore ici le rôle essentiel. Mais si l'on élimine les traces d'eau les phénomènes changent d'allure.

1° L'intensité diminue faiblement avec la durée de passage du courant.

2° Les chutes de potentiel qui viennent se localiser aux électrodes, et que les sondes révèlent, augmentent considérablement; par exemple :

Différence de potentiel aux électrodes.....	960^v	1440^v
Chute à l'anode...........................	220	320
Chute à la cathode........................	700	1000

L'élimination de l'eau change donc la nature du phénomène : avec des traces d'humidité nous avons les caractères d'un électrolyte; l'eau étant éliminée le mieux possible nous tombons sur les caractères des substances semi-conductrices avec chutes considérables de potentiel aux électrodes et émission probable d'un rayonnement.

(1) Rothé, *Thèse*, 1904 (*Annales de Chimie et de Physique*, 8e série, 1, 1904, p. 215).

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur une méthode d'étude de la décomposition des cotons-poudres à la température ordinaire*. Note de M. **Maurice Lambrey**, présentée par M. Ch. Fabry.

Les différentes méthodes actuellement existantes pour l'essai des cotons-poudres reposent toutes sur l'étude d'une décomposition à une température relativement élevée, en général notablement supérieure à 65°C. On peut se demander jusqu'à quel point la stabilité d'un produit nitré à la température ordinaire peut se déduire d'une telle étude et il paraît hautement désirable d'établir une méthode d'essai qui puisse être mise en œuvre aux environs de 30°C.

Il s'agit alors de pouvoir mettre en évidence de très faibles quantités de produits nitreux, peroxyde d'azote ou oxyde azotique. Si l'on se reporte aux mesures de Will ([1]) et qu'on admette son extrapolation aux basses températures, on trouve que, selon cet auteur, 1^g de coton-poudre à 13,1 pour 100 d'azote, amené à l'état limite de stabilité, dégagerait, à 30°C., sous forme de produits nitreux, environ $6,25.10^{-7}$ mg d'azote en 100 jours, ce qui correspond à la destruction du millième du coton-poudre présent en 70 ans environ. Si la réaction a lieu en présence des produits de décomposition, on peut admettre, d'après Robertson ([2]), que les trois quarts de l'azote dégagé se trouvent à l'état d'oxyde azotique et il en résulte qu'à 30°C., en 100 jours, 1^g de coton-poudre à l'état limite dégagerait environ 8.10^{-7} cm³ d'oxyde azotique, mesuré dans les conditions normales.

De telles quantités d'oxyde azotique peuvent être mises en évidence si l'on met à profit l'existence des lois exceptionnelles auxquelles obéit la densité optique relative aux bandes d'absorption γ de ce gaz.

On sait que ([3]) si, à une masse constante d'oxyde azotique, enfermée dans un tube déterminé, on ajoute un gaz inerte, transparent, quelconque, l'intensité des bandes d'absorption γ de NO augmente considérablement. Le calcul montre par exemple que, la pression initiale de NO étant $\frac{1}{100}$ de millimètre de mercure, le coefficient d'absorption de ce gaz se trouve multiplié par environ 120 lorsqu'on lui ajoute de l'hydrogène de façon que la

---

([1]) Will, *Untersuchungen über die Stabilität von Nitrocellulose*. Neubabelsberg, Berlin, 1903.

([2]) Robertson, *Journ. of the Chem. Soc.*, 91, 1907, p. 761 et 764.

([3]) Lambrey, *Ann. der Phys.*, 14, 1930, p. 95.

pression du mélange atteigne 1^{atm}. Il m'a été possible de cette façon de mettre nettement en évidence, dans un tube de longueur 160^{mm}, l'existence d'oxyde azotique sous une pression n'excédant pas 2^{μ} de mercure.

Pratiquement, le coton-poudre en expérience est placé dans un tube scellé présentant deux fenêtres de quartz permettant l'étude du spectre d'absorption de l'atmosphère interne. Après avoir fait un vide soigné pendant plusieurs dizaines d'heures, le tube est fermé et placé dans une étuve. Au sortir de celle-ci l'examen du spectre se fait après introduction d'hydrogène sous la pression 1^{atm}.

La discussion des conditions du maximum de sensibilité conduit à réduire au minimum le volume offert au gaz dégagé; mais il y a lieu de tenir compte de ce qu'un volume nuisible, irréductible, se trouve à l'intérieur du coton-poudre lui-même. Il est à peu près la moitié du volume apparent occupé par ce dernier. On peut alors démontrer, qu'étant donnée une masse déterminée de coton-poudre, le maximum de sensibilité est obtenu lorsque la cellule d'absorption, aussi longue et étroite que la commodité des mesures optiques le permet, doit avoir un volume égal à la moitié de ce volume nuisible.

Un tube répondant à ces conditions aura par exemple les caractéristiques suivantes : volume occupé par le coton-poudre, 8^{cm^3}; cellule d'absorption, longueur, 160^{mm}; diamètre, 4^{mm}; masse de coton-poudre étudiée, $7^{g},2$; volume minimum d'oxyde azotique décelable 6^{cm^3}, sous 2^{μ}, soit 27.10^{-7} cm^3 mesurés sous la pression atmosphérique. Le contrôle des résultats de l'extrapolation de Will est alors possible.

Les résultats obtenus jusqu'à présent sont des plus encourageants. Des dégagements d'oxyde azotique à 30° C ont pu être mis en évidence pour divers échantillons de coton-poudre très soigneusement purifiés et pour un échantillon de tétranitropentaérythrite. Des essais en cours permettront de préciser s'il s'agit bien de la décomposition de ces substances elles-mêmes ou de celle de traces de produits plus instables qui s'y trouveraient mélangés.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur le mode d'action des catalyseurs déshydratants dans le cracking hydrogénant des phénols.* Note de MM. **André Kling** et **Daniel Florentin**, présentée par M. Camille Matignon.

Nous avons fait connaître ([1]) le mécanisme du cracking hydrogénant et indiqué que l'hydrogénation des molécules organiques lourdes n'était possible qu'autant qu'elle s'accompagnait d'une scission des dites molécules, sous l'action de la chaleur.

Quand les molécules sont stables à haute température nous avons préconisé l'emploi de catalyseurs susceptibles de diminuer leur stabilité et d'abaisser leur seuil de décomposition.

Dans le cas des phénols, on parvient à ce résultat, en faisant intervenir des *catalyseurs déshydratants* qui déterminent le départ des groupes hydroxylés. C'est ainsi que nous avons pu transformer le phénol ordinaire en benzène, en faisant agir sur lui l'hydrogène sous haute pression (200^{atm}) à une température de 470-480°, en présence de catalyseurs déshydratants tels que l'alumine, la thorine, l'oxyde de chrome, etc.

Depuis nous avons découvert que les propriétés catalytiques de ces oxydes étaient profondément modifiées suivant la température à laquelle on portait ces oxydes, avant de les utiliser. D'une façon générale, contrairement à ce que l'on pourrait supposer, leur activité est notablement accrue quand ces catalyseurs sont chauffés préalablement à une haute température (750° par exemple).

C'est ainsi qu'un échantillon d'alumine pure, séchée à 150°, ne transforme, en 4 heures, à 485°, que 45 pour 100 du phénol en benzène mais, si l'on porte cette alumine à 750°, la transformation du phénol, dans les mêmes conditions atteint 75 pour 100 au moins; en même temps la durée d'utilisation du catalyseur est augmentée; en un mot un catalyseur préparé à haute température est plus actif et plus robuste qu'un autre obtenu à plus basse température.

Il en est de même dans le cas de l'oxyde bleu de molybdène (Mo^2O^5), qui, comme nous l'avons reconnu, transforme aisément le phénol en hydrocarbures légers, mais par un mécanisme différent. Cet oxyde qui, préparé à basse température, est surtout doué de propriétés hydrogénantes,

---

([1]) *Comptes rendus*, **182**, 1926, p. 389 et 526.

voit son activité déshydratante s'accroître considérablement quand il est préparé à haute température et, alors qu'auparavant il fournissait principalement de l'hexane et du cyclohexane, il donne, après chauffage, des hydrocarbures riches en benzène.

Nos études nous ont montré que, dans ce type de catalyse, le catalyseur agit surtout par *surface*, autant que chimiquement; l'élévation de température détermine un départ d'eau combinée et augmente ainsi sa porosité et son pouvoir adsorbant. Il est aisé de le vérifier en comparant son pouvoir décolorant vis-à-vis, par exemple, du bleu de méthylène; l'alumine, chauffée à 750°, possède une activité au moins double de celle de l'alumine séchée à 110-120° et le pouvoir adsorbant de ce catalyseur mesure assez bien son pouvoir catalytique de déshydratation.

En résumé, pour transformer les phénols en hydrocarbures benzéniques, à peu près purs, il sera avantageux d'utiliser des catalyseurs déshydratants (alumine, oxyde chromé, etc.) préparés à haute température (750°) sous des pressions d'hydrogène moyennes, mais telles que l'hydrogène mis en œuvre représente 6 à 7 pour cent du poids total du phénol.

Résultats numériques obtenus dans une bombe de laboratoire de 2 litres.

Catalyseur.	% de H^2.	Température maxima.	Durée de la réaction.	Pression maximum en kg/cm².	Rendement % en hydrocarbures légers.	Densité des hydrocarbures à 15°.
Al^2O^3 séchée à 150°..	9,0	485°	4.00 h m	260	37,0	0,868
Al^2O^3 séchée à 750°..	9,0	490	3.00	330	54,5	0,863
Tu^2O^5 ord..........	9,0	485	3.00	325	39,6	0,860
Tu^2O^3 activé........	9,0	485	3.00	320	58,0	0,856
Mo^2O^5 ord..........	11,5	490	0.60	298	72,0	0,804
Mo^2O^5 activé........	9,0	489	0.50	296	64,0	0,820

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur l'autoxydation de l'acide urique en présence d'amines.* Note (¹) de M. **Frèrejacque**, présentée par M. R. Fosse.

I. Nous avons montré récemment (²) que l'autoxydation des solutions alcalines d'acide urique était remarquablement catalysée par le charbon

(¹) Séance du 3 novembre 1931.

(²) *Comptes rendus*, 191, 1930, p. 949.

activé; l'emploi de concentrations convenables de charbon permet de fixer en quelques minutes 2 atomes d'oxygène par molécule d'acide urique. Piaux (1) a montré qu'au contraire l'emploi du lactate de manganèse comme catalyseur permettait de fixer un seul atome d'oxygène par molécule d'acide urique. En réalité nous avons constaté qu'on pouvait remplacer le lactate de manganèse par du bioxyde de manganèse, de la pyrolusite pulvérisée par exemple; on peut obtenir un catalyseur très actif en ajoutant une trace de MnO^4K à la solution à oxyder. L'emploi de MnO^2 préparé à partir de MnO^4K nous a ainsi permis de terminer l'autoxydation des solutions alcalines d'acide urique en 5 à 10 minutes. L'acidulation des solutions oxydées donne naissance à un dépôt d'allantoïne.

II. On admet généralement que le passage de l'acide urique à l'allantoïne se fait par l'intermédiaire de corps instables qu'on n'a pu isoler. Nous avons cherché à mettre en évidence ces intermédiaires en tentant de les bloquer lors de leur apparition au moyen d'un réactif convenable. Pour cela nous avons agité en présence de O^2 et de MnO^2 des solutions alcalines d'acide urique auxquelles nous avions ajouté préalablement un réactif que nous pensions susceptible de capter un terme intermédiaire d'oxydation. L'oxydation en présence d'aniline s'est révélée particulièrement intéressante.

Par exemple, on agite, dans une atmosphère de O^2, le mélange suivant : $KOH\,n$: 100^{cm^3}; acide urique : $4^g,2$; aniline 3^g; MnO^4K $0^g,05$. Il y a absorption de 140^{cm^3} de O^2 en 6 minutes. L'oxydation est alors terminée. Après filtration de MnO^2, le filtrat est acidulé ($CH^3.CO^2H$); il précipite immédiatement un uréide visiblement différent de l'allantoïne.

Recristallisé rapidement dans un grand excès d'eau bouillante, cet uréide se présente en longues aiguilles brillantes se décomposant vers 290° (bloc Maquenne) auxquelles l'analyse assigne la formule $C^{10}H^{11}N^5O^2$. Ce corps est soluble dans la potasse et les acides minéraux étendus, mais insoluble dans l'ammoniaque et l'acide acétique. Les solutions acides laissent déposer rapidement des cristaux d'allantoïne, avec mise en liberté corrélative d'aniline. Il y a eu hydrolyse :

$$C^{10}H^{11}N^5O^2 + H^2O = C^4H^6N^4O^3 + C^6H^5.NH^2.$$

III. On peut obtenir de la même façon des uréides analogues en remplaçant l'aniline par la para ou la métatoluidine; le dérivé de la para-

(1) *Comptes rendus*, 178, 1924, p. 782.

toluidine (aiguilles brillantes) est encore moins soluble dans l'eau que le dérivé de l'aniline; celui de la métatoluidine (feuillets nacrés) est plus soluble. Ces deux uréides se décomposent tous deux vers 290° : l'analyse leur assigne la formule $C^{10}H^{13}N^5O^2$.

On ne peut obtenir de dérivé analogue avec l'orthotoluidine; sans doute s'agit-il ici d'un cas d'empêchement stérique.

IV. Nous avons de même oxydé l'acide urique en présence de pipéridine pour voir si une amine secondaire était susceptible de s'unir au corps intermédiaire d'oxydation envisagé; on peut d'ailleurs ici oxyder en l'absence d'alcali, puisque l'acide urique est soluble dans la pipéridine aqueuse; l'autoxydation est alors plus longue et n'est achevée qu'au bout d'une heure environ. La solution autoxydée laisse alors déposer directement (sans acidulation) un uréide cristallisé en lamelles losangiques se décomposant vers 280°. Cet uréide est nettement plus basique que le dérivé correspondant de l'aniline. Il est soluble dans les acides faibles (acétique, tartrique) et les solutions obtenues laissent lentement déposer de l'allantoïne; il est insoluble dans la potasse diluée, et l'ammoniaque. Il se comporte comme une véritable amine tertiaire donnant un chloroplatinate.

$PtCl^6H^2.2C^9H^{15}N^5O^2$, cristallisé en lamelles assez solubles se décomposant à 280°, un picrate $C^6H^2(OH).(NO^2)^3.C^9H^{15}N^5O^2$, en prismes peu solubles se décomposant à 240°, un perchlorate $ClO^4H.C^9H^{15}N^5O^2$, en prismes assez solubles se décomposant à 270°.

V. Les uréides que nous avons obtenus sont évidemment des homologues de l'imino-allantoïne de Denicke [1] préparée par oxydation des suspensions d'acide urique dans l'ammoniaque; nous avons d'ailleurs retrouvé le corps de Denicke en remplaçant dans nos expériences l'aniline par l'ammoniaque.

Denicke envisageait pour son iminoallantoïne les formules I et II :

```
     ,NH — C(NH²) — NH                 ,NH — CH — NH.CONH²
CO<        |          >CO        CO<        |
     `NH — CH ——————— NH´              `NH — C = NH
            I.                                II.
```

La formule II ne permettant pas d'expliquer la formation d'un dérivé pipéridinique, nous devons donc adopter pour les uréides obtenus avec l'aniline et la pipéridine les schémas III et IV qui en font des dérivés d'une

(1) *Lieb. Ann.*, 349, 1906, p. 269.

isoallantoïne V :

$$CO\left<\begin{matrix}NH - C(NH.C^6H^5) - NH \\ NH - CH \text{------------} NH\end{matrix}\right>CO \quad \text{III.} \qquad CO\left<\begin{matrix}NH - C(NC^5H^{10}) - NH \\ NH - CH \text{------------} NH\end{matrix}\right>CO \quad \text{IV.}$$

$$CO\left<\begin{matrix}NH - C(OH) - NH \\ NH - CH \text{------} NH\end{matrix}\right>CO \quad \text{V.}$$

VI. Nos expériences semblent donc bien indiquer que la formation de l'allantoïne, lors de l'oxydation de l'acide urique, est précédée de l'apparition transitoire d'une isoallantoïne. Il existe d'ailleurs certainement un autre corps intermédiaire entre l'isoallantoïne et l'acide urique; en effet nous avons pu constater que lorsqu'on oxyde par notre procédé une solution *alcaline* d'acide urique en présence de pipéridine, la solution oxydée ne laisse pas déposer l'uréide IV, qui est cependant insoluble dans la potasse, mais cet uréide précipite au contraire si la solution oxydée est d'abord acidulée, puis alcalinisée par l'ammoniaque. Il en faut donc conclure que la formation d'isoallantoïne est précédée de l'apparition d'un uréide qui n'est stable qu'en milieu très alcalin, hypothèse qui est en accord avec ce qu'on sait de la formation des uroxanates lors de l'oxydation de l'acide urique.

GÉOLOGIE. — *Sur l'extension des roches éruptives grenues dans l'archipel de Kerguelen.* Note (1) de M. E. **Aubert de La Rüe.**

J'ai pu, en 1931, au cours d'une mission dont m'avait chargé le Gouvernement général de Madagascar, poursuivre l'exploration géologique de l'archipel de Kerguelen, commencée lors d'un précédent voyage, en 1928. De nombreuses reconnaissances à l'intérieur du pays, notamment dans les grandes péninsules du Sud m'ont permis de faire des constatations nouvelles sur la constitution de ces îles australes.

On sait que ces îles se sont édifiées à la suite d'épanchements basaltiques succédant à des éruptions trachytiques et phonolitiques. La présence de certaines roches éruptives grenues, rencontrées jusqu'ici isolément et d'une façon toute accidentelle, montre que cet archipel n'est pas de formation exclusivement volcanique.

(1) Séance du 3 novembre 1931.

En 1874 Studer découvrit à l'est du mont Crozier une diorite micacée, décrite par Roth [J. Roth, *Ueber die Gesteine von Kerguelen-Land* (*Monatsber. d. k. Akad. Wissensch. Berlin*, 1875, p. 723-735)]. Plus récemment M. A. Lacroix, étudiant des roches rapportées par M. Rallier du Baty puis par M. Peau, signalait la présence de diverses roches à feldspathoïdes (essexite, syénites néphéliniques) dans le nord du pays et dans le sud celle de granites et de syénites hyperalcalines (1) et d'une eucrite, ainsi que de roches volcaniques très modifiées, à facies de spilites, indiquant l'existence d'une série volcanique plus ancienne que celle constatée jusqu'alors.

J'ai pu, à mon tour, découvrir sur ces îles de nombreuses roches grenues appartenant à des types variés et se présentant de façons très différentes. Certaines sont en place, formant des massifs montagneux importants; d'autres en enclaves dans les roches volcaniques. Ailleurs on les rencontre en galets dans certains conglomérats fluviatiles et en blocs erratiques dans d'anciens dépôts morainiques.

J'ai constaté ces roches en place, dans le sud-ouest de l'archipel, où elles forment une partie des montagnes entre le cap Bourbon et le cap Dauphin; elles se poursuivent du reste à l'intérieur des terres où leur étude devient difficile du fait de la grande extension des glaces. J'ai recueilli notamment, dans les hauteurs entourant l'anse du Gros-Ventre, des granites alcalins, des syénites alcalines, des monzonites et surtout des diorites micacées; les gisements en place sont ceux dont proviennent les roches recueillies à l'état de blocs par M. Peau. Ces roches sont ici traversées par de nombreux filons (microgranite calco-alcalin, micromonzonite, microsyénite, dolérite, trachyte alcalin, etc.).

J'ai pu pénétrer dans le massif du mont Ross, demeuré complètement inexploré, et découvrir dans le cratère de cet ancien volcan, en grande partie recouvert de glaciers, des syénites, des diorites et des gabbros micacés, en enclaves dans les laves trachytiques et andésitiques.

Les épanchements basaltiques, un peu à l'est du Dôme Rouge, m'ont également fourni des enclaves intéressantes, de nature très basique. Ce sont des blocs arrondis, peu volumineux mais très nombreux, de gabbros, de plagioclasites, de péridotites et de pyroxénolites à augite.

---

(1) A. Lacroix, *Sur l'existence de roches néphéliniques grenues dans l'Archipel de Kerguelen* (*Comptes rendus*, 160, 1918, p. 187); *Les roches éruptives grenues de l'Archipel de Kerguelen* (*Comptes rendus*, 179, 1924, p. 113).

Au sud-est de Port-Jeanne d'Arc, loin de la pointe de la Géodésie, à la cote 100, apparaissent des conglomérats fluviatiles, compris entre des basaltes. J'y ai observé de nombreux galets de syénite et de monzonite.

La côte occidentale, difficilement accessible, dont la géologie demeurait inconnue, ne m'a guère donné d'indications intéressantes ; les glaciers, très développés, s'avancent parfois jusqu'à la mer et la côte, là où elle est libre de glace, apparaît basaltique. Les dépôts morainiques que j'ai examinés, montrent que l'arrière pays est de même nature. Je n'ai rencontré, comme roche grenue dans toute cette région, qu'un bloc de gabbro micacé, d'origine erratique sur l'île de l'Ouest.

Les moraines de la baie de la Mouche, dans le sud du pays, fournissent des précisions intéressantes sur la région qui s'étend immédiatement au Nord, recouverte par la Grande Arête de Glace ; il doit exister là des massifs de syénites alcalines et de diorites, si j'en crois les nombreux échantillons abandonnés par les glaciers sur les pentes ouest du mont des Rafales.

De part et d'autre de la baie des Swains, sur les hauts plateaux basaltiques des péninsules Joffre et Galliéni, entre 600 et 800 mètres d'altitude, apparaissent, à l'état de blocs erratiques, des gabbros, accompagnés de microgabbros et de dolérites ; ces roches, profondémment chloritisées et ouralitisées, semblent appartenir à une série éruptive assez ancienne.

Sur les pentes du même fjord, à des altitudes moindres, j'ai rencontré dans d'anciennes moraines, d'autres gabbros, des diorites et des syénites alcalines.

Ces dernières roches notamment, ne sont pas rares dans les montagnes de la péninsule Joffre, mais toujours à l'état isolé et jamais je n'ai pu les retrouver en place dans cette région ; elles appartiennent à des formations morainiques, témoignant de l'ancienne extension des glaciers, lors de la grande glaciation quaternaire. Dans ces mêmes montagnes, mais au-dessus de 500^{m} apparaît, dans les mêmes conditions, une roche assez particulière. Il s'agit d'une syénite à grain fin, très quartzique et pauvre en éléments colorés, rappelant assez les nordmarkites.

Les roches éruptives grenues semblent donc jouer un rôle assez important dans la constitution de l'archipel de Kerguelen. La région du Sud-Ouest, où je les ai observées en place est malheureusement l'une des plus difficile à explorer, par suite de l'extension des glaciers ; il en est de même du centre.

du pays où ces roches et en particulier les syénites alcalines doivent former des massifs assez importants si l'on en juge par le nombre des blocs erratiques rencontrés dans les régions avoisinantes.

L'âge de ces roches grenues, de même que leur relation avec les roches volcaniques visibles un peu partout, demeurent difficile à préciser. Je crois néanmoins qu'elles sont en relation avec une série éruptive assez ancienne, antérieure aux grands épanchements basaltiques, d'âge tertiaire.

GÉOLOGIE. — *Sur le prolongement vers l'ouest de la zone disloquée située au nord de la chaîne de la Marche*. Note de M. **Yang Kieh**.

Pendant les vacances dernières, j'ai continué à explorer la terminaison occidentale de la chaîne de la Marche, depuis le méridien Vareilles-la-Souterraine jusqu'à celui de Brigueil-Tersanne (limite des terrains cristallins et sédimentaires). La zone disloquée, signalée antérieurement [1], se prolonge dans ce secteur où elle est encore plus nette que dans la partie orientale.

Cette zone accidentée venant de l'Est, où elle passe au sud de Dun-le-Palleteau, est décrochée horizontalement de 1800^{m} vers le Sud au niveau de Saint-Léger-Bridereix. Ce déplacement, de direction S. 15°W., a été accompagné de phénomènes de broyage. Il y a, en effet, le long de la fracture des produits de remplissage, des mylonites, des filons de quartz et de granulite, etc. De là vers l'Ouest, la zone d'écrasement principale se continue normalement tant dans les granites à muscovite que dans le bord du massif de granite à biotite de Guéret. Mais le phénomène de laminage devient moins marqué dans le secteur Vareilles-Cromac.

Dans cette dernière région, la bande de granite à muscovite suivie depuis le sud de Bonnat s'étale au nord et en même temps, se rattache vers le sud à la terminaison du grand massif granulitique de la Haute-Vienne, qui longe le bord nord-ouest du grand massif granitique de Guéret. Cette bande de granite à muscovite contenant abondamment des enclaves gneisso-granitiques, s'étend sur une surface d'une dizaine de kilomètres carrés qui est

---

[1] Mouret, *Comptes rendus* 129, 1928, p. 1416 ; Mouret et Raguin, *ibid.*, 182, 1926, p. 228 ; Raguin, *B. S. G. F.*, 29, 1925-1926, p. 218 ; 30, 1927, p. 459 et 467 ; Yang Kieh, *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 836 ; *B. S. G. F.*, 4e série, 30, 1930, p. 461 ; *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 970.

coupée obliquement du Sud-Est au Nord-Ouest par la grande dislocation en question. On peut penser que le Massif de la Haute-Vienne, venant de la Bretagne, se bifurque en deux branches : l'une se dirige vers le Sud, l'autre à l'Est vers la Marche. Mais on peut supposer aussi que les deux longs massifs de la Marche et de la Haute-Vienne se croisent dans cette région. Car sur la carte géologique que j'ai tracée récemment, on voit que la Marche, modifiant sa direction principale E.N.E., se continue vers l'W.N.W. et que le massif de la Haute-Vienne abandonnant la direction méridienne se prolonge plus loin au N.E. de la précédente.

La géologie de ce massif gneisso-granitique, décrit ci-dessus se présente de la manière suivante :

1° Des bandes ou zones de roches cristallophylliennes montrent toutes la direction W.N.W.-E.S.E. : la plus grande, celle d'Arnac-la-Poste, s'étend sur 2 km. de large et 11 km. de long, et se compose de gneiss à cordiérite et à nodules de minéraux ferro-magnésiens. Ces roches sont abondamment sillonnées par des filons de granulite, le passage de cette dernière roche aux gneiss est insensible.

2° Des lentilles de granites appartenant soit à des types filoniens, soit à des enclaves.

3° De petits masifs de granites porphyroïdes, les uns contenant de la muscovite et se rapprochant de la granulite, les autres caractérisés par la présence de la biotite (massif de Saint-Hilaire).

4° Des filons de pegmatite graphique, d'aplite, etc.

5° De la serpentine se trouve au centre du massif granitique de Saint-Hilaire.

6° Des granites à muscovite qui comprennent l'ensemble des terrains décrits dans les paragraphes précédents représentent la masse principale.

Par suite des mouvements tectoniques, ces terrains montrent, soit une stratification, soit une fausse stratification ayant partout la direction W.N.W.-E.S.E. (suivant la ligne de Saint-Aignan à Cromac). L'écrasement se trouve sur une très large zone et, entre ces deux communes, présente toujours une continuité parfaite.

A partir du sud-est de Cromac, le phénomène de laminage reparaît intensivement. Grâce au creusement de la vallée de la Benaise, la mylonitisation se montre encore mieux que dans les autres régions de la chaîne; cette rivière se place à cheval sur l'accident considéré. D'un côté, au Sud-Sud-Ouest, on voit des granulites laminées; de l'autre côté, au Nord-Nord-Est, se trouvent des gneiss laminés. Cette zone laminée est identique à

celles qui se situent au sud de Dun-le-Palleteau, de Bonnat, de Chatelus-Malvaleix, etc. Elle se prolonge vers l'Ouest en passant par Jouac, au sud de Saint-Martin, jusqu'au sud de Brigueil où le recouvrement des terrains secondaires ne permet pas de poursuivre sa continuation. L'amplitude de cette bande laminée dépasse 3^{km} de large et 20^{km} de long.

Les terrains situés au Nord de cette fracture sont des schistes cristallins avec des bandes de roches amphiboliques : amphibolite, granodiorite, granite porphyroïde à amphibole, etc. (de Jouac à Coulonge en passant par Bonneuil). Au Sud-Sud-Ouest sont des granulites contenant des massifs de granites : de Saint-Léger-Magnazeix, de Tersanne, de Dompière, etc. qui occupent tous une surface de plusieurs kilomètres carrés. Dans ce massif grano-granulitique se trouvent plusieurs fractures en direction N.W.-S.E., la plus grande est celle de Saint-Hilaire à Lussac.

En résumé, cette grande zone disloquée se suit avec des sinuosités sur une longueur de plus de 150^{km}, en partant de la limite du département de la Vienne et de la Haute-Vienne jusqu'à la vallée du Cher où elle bute contre le massif d'Hérisson (Allier); sa largeur atteint parfois une dizaine de kilomètres. Cette région écrasée comprend la partie méridionale du Plateau d'Aigurande et la presque totalité de la Chaîne de la Marche. C'est donc l'un des très importants accidents tectoniques du Massif central français.

GÉOLOGIE. — *Sur la stratigraphie des formations sédimentaires de la province d'Analalava (nord-ouest de Madagascar).* Note de M. **Henri Besairie**, présentée par M. Ch. Jacob.

Le nord de la province d'Analalava a été exploré sommairement, il y a une trentaine d'années, par Baron, Colcanap et P. Lemoine. Au cours des derniers mois, j'ai étudié et cartographié l'ensemble de la province et reconnu la succession suivante :

1° *Karroo.* — Le terme inférieur de la série sédimentaire, reposant en discordance sur des gneiss arrasés, est représenté par des grès à stratification oblique et par des argiles du groupe de l'Isalo (bois silicifiés, lignites). Il s'y trouve une mince intercalation calcaire, sans fossiles.

2° *Lias supérieur, Bajocien ?* — A la base, calcaires à Rhynchonelles, grès à ossements, puis argiles et grès à stratification oblique, marnes à ossements de Dinosauriens.

3° *Bathonien.* — Calcaires à *Corbula grandidieri* Newton, *Pseudotrapesum* sp.

4° *Callovien.* — *a.* Calcaires et argiles à *Macrocephalites madagascariensis* Lemoine, *Pleurocephalites* sp., *Indocephalites* sp., *Indoscaphites urbanus* Spath, *Perisphinctes recuperoi* Gemm., *Holcophylloceras mediterraneum* Neumayr, *Ptychophylloceras feddeni* Waag., *Alcidia* sp., *Belemnopsis calloviensis* Oppel, *Alectryonia gregarea* Sow., *Pygurus depressus* Ag., *Rhynchonella füscheri* Rouiller. — *b.* Argiles à *Belemnites calloviensis.* — *c.* Banc de calcaire jaune à *Aspidoceras* sp., *Peltoceras* sp., *Reineckeia* sp.

5° *Grès et argiles.* — Rares fossiles, *Hibolites flemingi* Spath.

6° *Kimeridgien.* — Marnes à *Aspidoceras* sp., *Waagenia* sp. et argiles à *Belemnites.*

7° *Tithonique.* — *a.* Calcaires et argiles à *Streblites* sp. — *b.* Marnes et argiles à *Haploceras deplanatum* Oppel, *Hecticoceras kobelli* Oppel, *Hibolites flemingi* Spath, *H.* cf. *semisulcatum* Munster, *Duvalia* sp.

8° *Infravalanginien et valanginien inférieur.* — Argiles à *Belemnites* sp., *Duvalia dilatata* Blainv., *Duvalia sakalava* Bes. et lits de calcaires à *Hoplites* sp. avec empreinte douteuse de *Spiticeras ?*

9° *Valanginien supérieur.* — Grès glauconieux à *Rogersites schenki* Oppel, *R. sphaeroidalis* Spath., *Neocomites neocomiensis* d'Orb., *Leopoldia* cf. *submartini* Mallada, *Lytoceras* sp. (très abondants), *Belemnites* aff. *africanus* Tate, *Duvalia sakalava* Bes., *Duvalia* sp., *Pseudobelus* sp.

10° *Argiles et schistes argileux sans fossiles.*

11° *Aptien ?* — Grès et grès grossiers.

12° *Albien.* — Grès très fossilifères avec quatre niveaux. — *a. Douvilleiceras mamillare* Schl. — *b. Manuaniceras* sp. — *c.* Couches à lits de lignite. — *d. Persinquieria varicosa* Sow., *Myloceras* sp., *Holaster van hoepeni* Bes. et Lb.

13° *Cénomanien.* — Grès à *Acanthoceras mantelli* Sow., *Acanthoceras* sp.

14° *Coulées volcaniques.* — Elles reposent parfois en discordance sur les terrains antérieurs.

15° *Turonien.* — Craie à Échinides, *Thomasites* sp., *Protocardium hillanum* Sow., *Volutoderma* sp., *Modiola typica* Forbes.

16° *Coniacien.* — Grès et sables à *Barroisiceras haberfellneri* Hauer, *Peroniceras* sp.

17° *Sénonien supérieur transgressif.* — *a.* Grès et argiles à *Pseudoschloenbachia umbulazi* Baily, *P. griesbachi* Hoepen (Campanien moyen). — *b.* Craie à *Alectryonia ungulata* Schl., *Pyonodonta vesicularis* Lmk. (niveau

d'Andrakaraka). — *c*. Craie et calcaires à *Hercoglosa danica* Schl., *Leucaster lamberti* (niveau d'Andrafiavelo).

18° *Éocène.* — *a*. Calcaires à Nummulites, *N. atacicus* Leym., *Orthophragmina colcanapi* Douv., *Alveolina* sp., Échinides. — *b*. Calcaires marneux.

19° *Sables ferrugineux.* — Formation récente sans fossiles.

20° *Quaternaire.* — A une altitude approximative de 30^m, on rencontre, sur les collines dominant la mer, des restes de coquilles peu fossilisées qui vivent actuellement dans les vases des rives à palétuviers et aussi des galets de quartz roulés.

HYDROLOGIE. — *La décrue de l'Oronte en 1929-1930.* Note [1] de M. V. **Frolow**, présentée par M. E. Fichot.

I. L'Oronte à Djisr el Hadid réalise pendant la baisse des eaux une courbe de décrue au sens de M. E. Maillet; cette courbe peut être dégagée facilement du graphique 1929-1930, car pendant la baisse des eaux elle n'a été interrompue que par la fonte des neiges, peu nombreuses cette année et par deux ondes dues au ruissellement provoqué par des averses espacées.

II. L'équation $q = Ae^{-\alpha t}$ exprime la courbe de décrue, les paramètres A et α ayant des valeurs différentes dans quatre intervalles, comme l'indique le tableau suivant :

Intervalle.	Débit.	A.	α.	Durée.	Jour.
—	82,80	—	—	—	0
I	—	82,80	0,008673	37	—
—	60,07	—	—	—	37
II	—	85,45	0,009524	33	—
—	43,87	—	—	—	70
III	—	82,65	0,009049	46	—
—	28,93	—	—	—	116
IV	—	31,42	0,0007118	56	—
—	27,80	—	—	—	172

III. Les faibles différences des valeurs des paramètres dans les trois premiers intervalles s'expliquent par l'action simultanée d'assèchement des plaines inondées et de l'augmentation du taux d'évaporation. La courbe de

(1) Séance du 3 novembre 1931.

décrue est donc caractérisée par l'existence d'un premier tronçon (intervalles I, II et III) à forte pente, suivi par un tronçon peu incliné (intervalle IV).

IV. L'explication de ce fait doit être recherchée dans la nature particulière des terrains du bassin versant de l'Oronte. En grande majorité, ce sont des calcaires fissurés, où l'eau infiltrée remplit d'une part les fissures et d'autre part, imbibe la roche elle-même. A la baisse des eaux, les fissures se libérant plus rapidement que les roches, il doit exister une tranche, à fissures évacuées, dont les roches s'égouttent dans le réseau des fissures encore noyées. Ainsi se réalise une première phase de la baisse, alimentée tant par la vidange des fissures, qui va en diminuant, que par l'égouttement des roches donnant un débit de plus en plus grand (intervalles I à III).

Le débit de l'égouttement égalant à un certain moment celui évacué par les fissures, une deuxième phase de la baisse s'établit, où l'alimentation du débit provient presque exclusivement de l'égouttement des roches (intervalle IV).

V. En admettant que le débit dû à l'égouttement est proportionnel à la masse des roches également fissurées et que le facteur de proportionnalité reste pratiquement constant pendant la première partie de la décrue, on peut résumer la répartition du débit total observé entre l'égouttement des roches et la vidange des fissures par le système d'équations suivant :

$$q = q_e + q_f,$$
$$q_e = 2,65 \times 10^{-7}\mathrm{C} - 30,09 \times 10^{-7} t^3 + 29884,19 \times 10^{-7} t^2 - 1,254 t,$$

où C est la capacité souterraine nette libérée, donnée par l'intégrale

$$\mathrm{C} = \int_0^t \mathrm{A} e^{-\alpha t}\, dt.$$

(Dans l'établissement des expressions du débit dû à l'égouttement, il a été tenu compte des variations des pertes par évaporation révélées par la variation des valeurs des paramètres dans les trois premiers intervalles).

VI. Pour la décrue 1929-1930, la capacité nette alimentant les débits de l'Oronte à Djisr el Hadid a été de 675×10^6 m³ dont 320×10^6 fournis par les fissures et le complément par les roches elles-mêmes. Ces deux réserves ont donc participé à part égale à la formation du volume évacué en décrue de cette année par l'Oronte.

VII. Rapportée à la surface du bassin versant, la capacité souterraine nette alimentant le débit de ce fleuve mise en jeu en 1929-1930 représente

une hauteur de pluie de 38mm seulement, soit une faible partie du total des pluies qui en cette année, ont atteint 215mm à Idlib et ont dépassé 800mm à Antioche.

HYDROLOGIE. — *De la condensation de la vapeur d'eau dans le sol.* Note [1] de M. **F. Diénert**, présentée par M. Ch. Maurain.

J'ai montré (*Comptes rendus*, 192, 1931, p. 1402) comment on peut construire un pluviomètre souterrain pour recevoir les eaux de pluie infiltrées à travers le sable. Je rappelle que cet appareil est constitué par un tube vertical d'emmagasinement de l'eau de pluie en communication avec un plateau horizontal de récolte entouré d'une couronne de cailloux suffisamment haute et épaisse pour détruire la capillarité du sable qui siphonne en dehors du plateau l'eau de pluie qui descendait verticalement sur ce dernier.

Il ne fait aucun doute que tous les réseaux aquifères souterrains, même ceux circulant à travers le sable, contrairement à ce que pensent les hydrologues allemands, sont alimentés par les pluies infiltrées. Toutefois, certains hydrologues admettent, en outre, une autre origine, la condensation de la vapeur d'eau apportée par l'air atmosphérique.

Par des expériences directes (*Comptes rendus de l'Académie d'Agriculture*, séance du 3 juin 1931), j'ai montré que la diffusion de la vapeur d'eau en atmosphère calme à travers un sable est très lente, et si celle-ci se condensait complètement dans le sol, elle n'y apporterait qu'une quantité négligeable d'eau de l'ordre de grandeur de 9^{m^3} par hectare et par an. Cette origine est donc négligeable. Reste la condensation de la vapeur d'eau en atmosphère agitée, agitation due à la circulation de l'air atmosphérique dans le sous-sol, sous l'influence des variations de la pression barométrique ou d'autres moyens mécaniques que nous étudions actuellement.

Pour savoir si cette condensation dans le sol se faisait conformément aux lois actuellement connues, nous avons d'abord fait passer simultanément de l'air saturé d'humidité dans un récipient vide et dans un autre contenant du calcaire en morceaux, le tout maintenu dans une atmosphère à température rigoureusement constante. En dosant l'humidité à la sortie de ces deux récipients, nous avons obtenu le même chiffre.

---

[1] Séance du 3 novembre 1931.

Dans nos expériences, la roche n'influence donc pas la condensation d'humidité. Mais le passage de l'air à travers les débris de roches était rapide, de l'ordre de grandeur de 5 minutes. En sera-t-il de même si le contact est prolongé pendant un temps plus long?

Nous avons opéré en atmosphère close. Deux récipients en verre sont séparés par un tube en U contenant de l'eau. Celui-ci forme manomètre.

Dans un récipient, on met un peu d'eau, dans l'autre un peu d'eau avec beaucoup de calcaire saturé d'eau surnageant. On opère en présence de l'air de l'azote ou dans le vide. On ferme à la lampe les récipients à la température de la glace fondante et l'on suit les dénivellations de niveau dans le manomètre, après avoir porté progressivement les récipients à la température de 20°.

Dans le cas où la vapeur d'eau se condenserait mieux sur le calcaire saturé d'humidité, le manomètre devrait accuser une diminution très nette de pression dans le récipient contenant la roche. Nous espérions que cet abaissement serait d'autant plus accentué que la température serait plus élevée. C'est pourquoi on ferme à 0° et l'on porte le tout à 20°. En outre, il y aurait distillation continue du liquide du manomètre vers le calcaire, donc diminution de la quantité d'eau dans le tube en U.

L'expérience montre :

1° Qu'il n'y a pas de distillation de l'eau du manomètre;

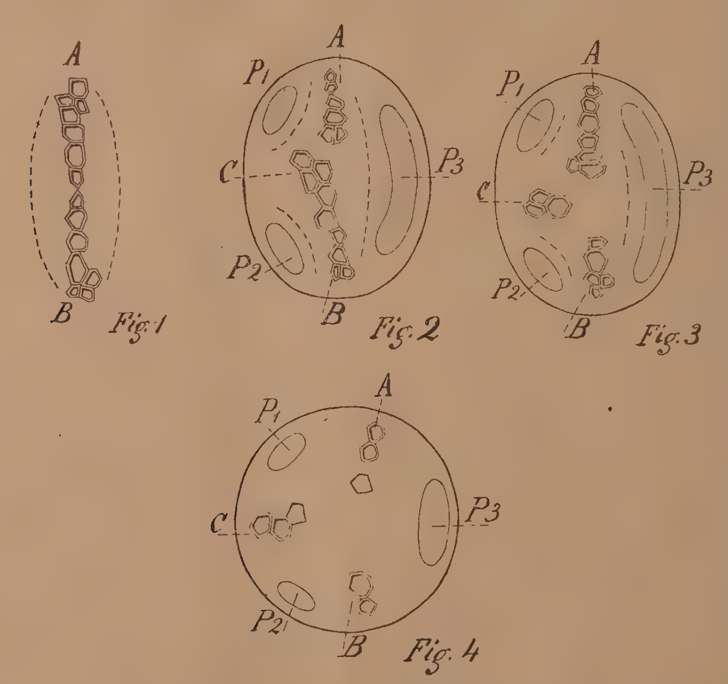
2° Qu'en présence de l'air il y a bien diminution lente de pression du côté du calcaire, mais que celle-ci tient à l'absorption de l'oxygène de l'air, le sol étant réducteur. Cette absorption d'oxygène correspond, pour la craie, à 3^{mg} d'oxygène par kilogramme de craie en un mois dans notre expérience;

3° Qu'en présence d'azote, ou dans le vide on n'obtient aucune variation du niveau de l'eau dans le manomètre.

Quand on opère avec du granite, on observe les mêmes résultats. Comme conclusion, ces expériences montrent que les matériaux expérimentés, provenant du sol, ne paraissent pas influencer la condensation de l'humidité lorsqu'ils sont eux-mêmes humides.

BOTANIQUE. — *Sur l'insertion vasculaire des radicelles.* Note de Mlle **Lucie Ricard**, présentée par M. Molliard.

On sait depuis les travaux de Van Tieghem que les faisceaux vasculaires d'une radicelle à structure binaire sont situés, à leur insertion, dans un plan passant par l'axe de la racine mère. Mais la plupart des radicelles possèdent plus de deux convergents dans leur partie libre. Dans ces conditions, le raccord vasculaire entre la radicelle et la racine mère se présente-t-il de la même façon?



Dans le Ricin, j'ai pu observer très nettement une structure binaire à l'origine de la radicelle et le passage de cette structure à une autre plus complexe. Cette étude a été faite au moyen de coupes en séries qui seront décrites à partir du point le plus rapproché du faisceau vasculaire de la racine mère. Une radicelle de 6^{mm} m'a montré à son origine une lame vasculaire continue et rectiligne dirigée parallèlement à l'axe de la racine mère (*fig.* 1). L'écorce n'existe pas à ce niveau, et, en raison de la position

latérale des faisceaux criblés de la racine mère et de leur raccord oblique avec ceux de la radicelle, ce raccord n'a pu être observé avec précision.

Au niveau de la périphérie du cylindre central de la racine mère (*fig.* 2), la radicelle possède une écorce et l'on voit trois groupes criblés P_1, P_2, P_3. Le xylème est représenté par deux faisceaux alternes, A et B, diamétralement opposés, et correspondant à la lame vasculaire de la figure 1. A l'extrémité interne du xylème B se trouvent des vaisseaux placés dans une direction oblique vers l'intervalle compris entre les phloèmes P_1 et P_2. Dans la moitié interne de l'écorce (*fig.* 3), A et B ont la même disposition; les vaisseaux qui, dans la figure 2, avaient une une tendance à s'avancer entre P_1 et P_2, sont, à ce niveau, un peu moins profonds et forment un groupe C séparé du xylème B. A l'extérieur de la racine (*fig.* 4), la radicelle possède trois convergents très nets.

Si nous considérons sur la figure 3 le groupe de vaisseaux qui paraît s'avancer entre les phloèmes P_1 et P_2, nous pouvons dire qu'il représente des éléments alternes, mais très profonds, du convergent C. De même, sur la figure 2, les éléments placés à la base de B peuvent être considérés comme constituant des vaisseaux encore plus profonds de ce même convergent. Or nous savons qu'en raison de la différenciation centripète du xylème alterne, les éléments les plus profonds sont toujours postérieurs, dans l'évolution vasculaire, à ceux qui sont situés plus près de la périphérie [G. CHAUVEAUD, *L'appareil conducteur des plantes vasculaires et les phases principales de son évolution* (*Ann. des Sc. Bot.*, 9e série, 13, 1911)]. Nous voyons donc, dans la partie la plus primitive de la radicelle, le xylème du troisième convergent, C, représenté uniquement par des éléments d'autant plus avancés dans l'évolution vasculaire qu'ils sont considérés plus près de l'insertion de la radicelle. Nous pouvons dire que ce convergent présente, dans cette région, une accélération de son développement par non-différenciation des vaisseaux les plus primitifs.

Le rôle de l'accélération dans la modification du nombre des convergents a déjà été mis en évidence par Tronchet ([2]); cet auteur a en effet décrit la réduction du nombre des convergents au fur et à mesure de l'accroissement des racines; il a montré que, dans certains cas, l'extinction du convergent se fait par réduction progressive des éléments les plus primitifs du xylème.

([1]) A. TRONCHET, *Recherches sur les types d'organisation les plus répandus de la plantule des Dicotylédones; leurs principales modifications, leurs rapports* (*Arch. de Bot.*, 4, Mémoire I, 1930).

Dans ce cas l'accélération est basipète par rapport à l'accroissement en longueur de la racine; dans le cas qui nous occupe elle est basifuge.

J'ai retrouvé cette lame vasculaire de la région primitive de la radicelle dans la Fève, mais, dans quelques cas, la même espèce m'a montré une disposition différente. En effet, des radicelles présentaient dans la région de l'insertion vasculaire trois groupes de xylème disposés suivant un triangle isocèle, l'un d'eux situé dans le plan passant par le faisceau correspondant de la racine mère, les deux autres lui étant opposés et situés de part et d'autre à une faible distance de ce plan. Ceci détermine une tendance à la bande diamétrale décrite précédemment, mais ne la réalise pas complètement.

Dans tous les cas étudiés (Ricin, Fève, Sterculie, Tabac, Ballote, Courge, Calycanthe), j'ai observé une tendance plus ou moins parfaite à la formation d'une lame vasculaire dans la région la plus primitive de la radicelle, lame disposée dans un plan vertical passant par le faisceau correspondant de la racine mère. Dans la plupart des cas, la radicelle acquiert ultérieurement un nombre de convergents supérieur à deux, et l'accroissement du nombre des xylèmes alternes se fait toujours grâce à une accélération basifuge du développement vasculaire. Il est donc permis de voir dans ce fait un nouvel exemple des phénomènes d'accélération qui jouent un rôle si important dans l'édification de la structure des plantes vasculaires.

PATHOLOGIE VÉGÉTALE. — *Nouvelles constatations sur les maladies à virus de la Canne à sucre et du Maïs*. Note de MM. **A. Kopp** et **D. d'Emmerez de Charmoy**, présentée par M. L. Mangin.

On appelle *Streak disease* une maladie à virus filtrant qui, si elle n'est pas une forme de la Mosaïque de la Canne à sucre étroitement spécialisée à certaines variétés, présente au moins de multiples parentés avec cette dernière.

Les divers symptômes qui la définissent se rencontrent avec plus ou moins de similitude sur le Maïs et sur la Canne *Uba* (groupe *Saccharum sinense*), bien qu'ils aient été signalés à plusieurs reprises sur certaines clones du type *S. officinarum : Badila*, *Port-Mackay*, *Black Innis*, *HQ* 694 ainsi que sur d'autres où domine ce parentage : *POJ* 213; *RP* 8.

Les travaux de Storey qui ont porté principalement sur la transmission à la Canne *Uba* à partir du Maïs, ont mis en évidence la nécessité de l'inter-

vention d'un puceron, vecteur de l'infection entre ces deux plantes : *Balclutha mbila*. D'autre part Storey et Mc Lean ont trouvé que le virus de la Canne cause, chez le Maïs, une forme bénigne de la maladie et que celui du Maïs provoque, chez la Canne, une forme éphémère dont la plante se remet facilement.

A la Réunion, le Streak du Maïs se rencontre dans toute l'île mais sa fréquence varie avec les régions. Le Maïs « du pays » semble le tolérer sans trop de dégâts. Par contre, toutes les fois que nous avons essayé d'acclimater des variétés en provenance directe des États-Unis ou de la France, nous nous sommes heurtés à une véritable explosion de Streak extrêmement virulent qui a détruit les Maïs bien avant l'épiaison. Les plants sont souvent couverts d'Aphidiens, ce qui prouve que de Maïs à Maïs, un Aphis banal est l'agent ordinaire de la contamination. Au domaine de la Providence, dépendant de la Station Agronomique, ce phénomène s'est produit invariablement à chaque tentative d'acclimatation, quelles que soient les conditions atmosphériques. A quelques kilomètres de là, au domaine de la Bretagne, dépendant également de la Station Agronomique, la maladie existe mais beaucoup plus rare et avec moins de virulence.

A la Providence aucun cas n'a été trouvé sur des Cannes au voisinage immédiat des Maïs contaminés et couverts d'Aphis; ni sur la *POJ* 213 (hybride à base de *S. officinarum*), ni sur la *Si nombre* (*S. sinense*); ni sur la *RP* 8; par contre, à la Bretagne, où pourtant la maladie est rare sur les Maïs, la *RP* 8, provenant de la Providence, où elle est indemne, est seule contaminée, alors que la *Uba* ne l'est pas dans le voisinage.

A la Réunion, la seule Canne à sucre sur qui jusqu'à présent nous avons trouvé les symptômes, surtout dans la région de Saint-André et de Sainte-Marie, est la *RP* 8. Nous n'avons jamais constaté que d'autres variétés fussent malades même lorsque les souches de *RP* 8 sont en quelque sorte intrichées parmi d'autres variétés. (Bien que Sheperd signale la maladie en 1925, avant l'introduction de la *RP* 8.) L'infection sur les *RP* 8 n'apparaissant parfois que sur les Cannes de la deuxième coupe, ceci exclut l'hypothèse de boutures prises sur des pieds déjà malades.

Nous avons donc été amenés à supposer qu'il existe, dans la végétation spontanée, des réservoirs de virus autres que le Maïs susceptibles de contaminer la Canne et qu'un autre insecte différent du *Balclutha mbila* joue ici le rôle de vecteur.

Une première indication a été fournie à l'un de nous en 1929 par l'apparition de symptômes bien caractéristiques sur de très jeunes seedlings de Canne à sucre à quelques pas de pieds de *Coix Lacryma-Jobii* franchement malades. Or le *Coix Lacryma-Jobii* ne figurait pas jusqu'à présent dans la liste des plantes susceptibles à cette maladie.

Nous avons repris l'expérience en 1930 à l'aide de jeunes seedlings issus d'une flèche de *RP* 6, Ces plants furent cultivés sous cloche pendant un certain temps à l'abri de toute contamination, puis reçurent une colonie de pucerons autres que *B. mbila* prélevés sur un pied de *Coix Lacryma-Jobii* franchement malade.

A quelques jours d'intervalle deux des plants ainsi contaminés montrèrent très nettement les symptômes du Streak.

Cette expérience et ces observations mettent donc en évidence les points suivants :

1° Le virus du *Streak* de *Coix Lacryma-Jobii* est virulent pour la Canne à sucre;

2° Plusieurs hémiptères peuvent servir de vecteurs pour les virus (mais chacun entre des espèces végétales bien déterminées) ou pour un virus déterminé;

3° Il est possible que le virus du Streak du Maïs soit hébergé par des Graminées autres que la Canne à sucre *même sans symptômes visibles*, et y reçoive une véritable activation;

4° A la Réunion, le Streak de la *RP* 8 et celui du Maïs sont antérieurs à l'introduction de la variété *RP* 8 en provenance de Maurice;

5° L'emploi de jeunes seedlings de Canne à sucre de 1 à 2 mois est de nature à rendre de grands services dans l'étude du *Streak*.

OPTIQUE PHYSIOLOGIQUE. — *Quelles sont les couleurs dont la confusion est commune à tous les daltoniens?* Note de M. **Polack**, présentée par M. Fabry.

L'histoire du daltonisme est dominée par la préoccupation des auteurs de rechercher les différences entre daltoniens, d'en établir des catégories et de les faire cadrer avec les théories de la vision des couleurs, la théorie de Th. Young en particulier.

Helmholtz, par exemple, aborde la question en ces termes : « Il n'existe encore, que je sache, aucun autre moyen de déterminer les couleurs fondamentales, que l'examen des sujets affectés de dyschromatopsie. Nous verrons plus loin jusqu'à quel point cet examen confirme l'hypothèse de Th. Young, au moins pour le rouge. »

Maxwell voit également dans l'étude du daltonisme le moyen d'étayer l'hypothèse des trois fondamentales.

Dans cette orientation d'idées on a créé des classifications et une termi-

nologie purement théoriques et l'on a omis de préciser le caractère général du daltonisme, c'est-à-dire déterminer les couleurs que tous les daltoniens confondent inévitablement. On a laissé ainsi s'établir l'opinion d'après laquelle les daltoniens confondent principalement le rouge et le vert. L'observation montre cependant que cette confusion n'est pas constante. Lorsqu'on examine les daltoniens par la méthode de Seebeck, dite méthode des couleurs de confusion ([1]), on constate qu'ils séparent très souvent le rouge et le vert, mais *confondent toujours le bleu, le violet, le pourpre et le bleu verdâtre.*

Dans les cas légers la confusion ne se produit qu'avec des nuances très blanchâtres, dans les degrés accusés de daltonisme elle s'étend à des nuances plus saturées. Le groupement de ces couleurs peut présenter des variations individuelles.

Ces notions sont d'une importance évidente et doivent être présentes à l'esprit de ceux qui étudient le daltonisme. Elles permettent, entre autre, de simplifier la vieille méthode de Seebeck. En effet, connaissant les couleurs dont la confusion est constante, on peut n'employer que leurs nuances pour un examen rapide, quitte à compléter ensuite le diagnostic, à l'aide des autres couleurs.

On remarque dans ce dernier cas que la confusion de l'orangé et du vert jaunâtre est bien plus fréquente que celle du rouge et du vert.

Pour faciliter l'examen du sens chromatique, j'ai composé un test d'un assortiment de couleurs ([2]) dont chacune est représentée par un certain nombre de nuances, de saturation graduellement décroissante. Le tout est divisé en deux groupes et logé dans deux compartiments séparés. Le premier groupe comprend le pourpre, le violet, le bleu et le bleu verdâtre et sert à établir un diagnostic rapide, le second groupe renferme toutes les autres couleurs et permet de pousser plus loin l'examen pour préciser ce diagnostic.

Un plateau, divisé en douze travées, facilite le classement des petits rectangles colorés et permet de les immobiliser dans l'ordre donné.

La simplification apportée ainsi à la méthode augmente considérable-

---

([1]) Cette méthode très ancienne, décrite pour la première fois par Seebeck en 1837, consiste à faire classer par l'examiné des papiers ou des laines colorés, en groupant leurs nuances d'après leur ton.

([2]) Rouge, orangé, jaune, vert jaunâtre, vert, vert bleuté, bleu verdâtre, bleu, violet, pourpre, gris et brun.

ment sa rapidité, sans rien enlever de sa sécurité, à condition d'employer un assortiment rationnel de couleurs et de prendre pour criterium le fait que tous les daltoniens confondent le bleu, le violet, le pourpre et le bleu verdâtre, de saturation variable, suivant le degré de leur anomalie.

A la lumière de ce fait, il conviendrait de reprendre l'étude du daltonisme au point où l'ont laissée les travaux de Seebeck alors qu'elle n'était pas encore asservie aux diverses théories de la vision des couleurs.

PHARMACOLOGIE. — *Sur l'action vaso-dilatatrice indirecte des alcaloïdes de l'ergot.* Note de M. **Raymond-Hamet**, présentée par M. H. Vincent.

L'étude de l'action des poisons sur la pression artérielle et sur le pléthysmogramme des organes étant d'ordinaire insuffisante pour déterminer le mécanisme de leur action vasculaire, on a utilisé dans ce but les méthodes de perfusion, en particulier celle de Läwen-Trendelenburg qui emploie le train postérieur de grenouille, celle de Krawkoff-Pissemski qui fait usage de l'oreille de lapin, enfin celle de Kochmann et Catel (1) qui se sert du train postérieur du cobaye (2).

Afin de déterminer le mécanisme de l'action vasculaire de l'ergot sans faire état de ses effets si souvent étudiés sur la pression artérielle et sans tenir compte des interprétations qui ont été données de ces effets, nous avons préféré, aux trois méthodes classiques de perfusion, la technique encore peu connue de Schilf (3) qui consiste à enregistrer, au moyen d'un compteur de débit du type décrit par Condon (4), les modifications de l'écoulement sanguin de la principale veine d'un organe normalement irrigué et innervé, provoquées par l'injection d'un poison dans une ramification de l'artère principale de cet organe.

Il convient de rappeler tout d'abord que plusieurs cliniciens (5) ont

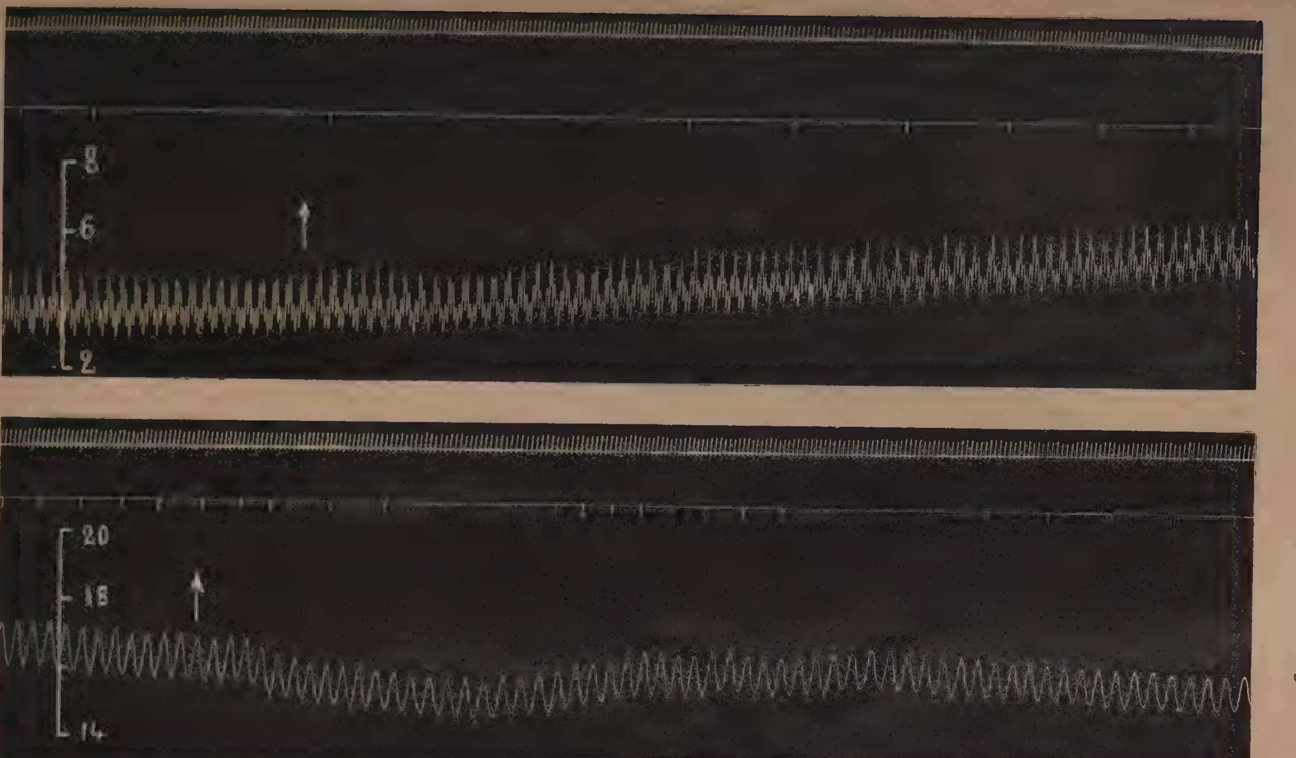
(1) M. Kochmann et W. Catel, *Zeitschr. f. d. ges. exp. Med.*, 32, 1923, p. 277-280.

(2) On peut s'étonner que J. Lévy (*Essais et dosages biologiques des substances médicamenteuses*, Thèse doct. méd., Paris, 1930) ait récemment présenté comme nouvelle cette technique qui est cependant classique (M. Kochmann, *in* Abderhalden, *Handb. d. biolog. Arbeitsmethoden*, Lieferung 285, p. 878-879).

(3) E. Schilf, *Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmakol.*, 126, 1927, p. 38.

(4) N. E. Condon, *Journ. of Physiol.*, 46, 1913, p. XLVI.

(5) H. Vignes, *Physiologie gynécologique et Médecine des femmes*, Paris, 1929, p. 277.



Tracé supérieur : expérience du 10 octobre 1931. Chien de 20^{kg} anesthésié par le chloralose, (12^{cg} par kilogramme) ayant ses vagues coupés au cou, soumis à la respiration artificielle et ayant reçu 9^{mg} par kilogramme de polyanétholsulfonate de soude pour rendre le sang incoagulable. — Tracé inférieur : expérience du 10 octobre 1931. Chien de 19^{kg} anesthésié par le chloralose (12^{cg} par kilogramme) ayant ses vagues coupés au cou, soumis à la respiration artificielle, ayant subi la bisurrénalectomie et ayant reçu 9^{mg} par kilogramme de polyanétholsulfonate de soude pour rendre le sang incoagulable. — Première et quatrième lignes : temps en secondes; deuxième et cinquième lignes : modifications de l'écoulement de la veine fémorale de la patte postérieure gauche, chaque trait vertical correspondant à l'écoulement de 4^{cm^3} de sang; troisième et sixième lignes : variations de la pression artérielle enregistrées par le manomètre à mercure. Aux points marqués par les flèches, injection, dans la saphène de chacun des deux chiens, de 20^{mg} de méthanesulfonate d'ergotamine en solution dans 2^{cm^3} d'eau distillée. (Tracés reproduits en grandeur naturelle.)

constaté que l'ergot, considéré d'ordinaire comme exclusivement vaso-constricteur, augmente parfois les hémorragies. Il paraissait logique d'attribuer cette action à la présence dans l'ergot, à côté des alcaloïdes vaso-constricteurs, de deux amines puissamment vaso-dilatatrices, l'acétylcholine et l'histamine, mais Ganter ([1]) puis Heymans et Regniers ([2]) ont montré qu'un de ces alcaloïdes vaso-constricteurs, l'ergotamine, provoque, dans certains cas, une vaso-dilatation évidente.

La perfusion de la patte postérieure du chien normal, au moyen de la méthode de Schilf modifiée par nous, nous a montré que, le plus souvent, l'ergotamine manifeste, sur cet organe, une action vaso-dilatatrice indéniable, suivie d'ordinaire, il est vrai, de vaso-constriction. Au contraire, sur l'animal bisurrénalectomisé, l'ergotamine, dans des conditions expérimentales identiques, révèle une action exclusivement vaso-constrictive. On est donc en droit de conclure que la vaso-dilatation provoquée par l'ergotamine n'est pas due à une action directe de cet alcaloïde, mais résulte de l'inversion par ce dernier des effets vasculaires de l'adrénaline circulante. De même que Gley a donné le nom de vaso-constricteurs indirects aux poisons dont les effets sur les vaisseaux résultent, d'après lui, de l'hypersécrétion adrénalinique qu'ils provoquent, nous pouvons considérer, comme des vaso-dilatateurs indirects, les toxiques qui doivent leur action vaso-dilatatrice à l'adrénaline circulante dont l'action vasculaire normale a été par eux inversée.

Il est permis d'admettre que c'est à la variation de l'indice adrénalique sanguin ([3]) qu'il faut attribuer la diversité, chez l'homme, des effets vasculaires de l'ergot. Il est logique de penser que l'augmentation des hémorragies par l'ergot s'observe chez les sujets qui présentent de l'hyperadrénalinémie tandis que les cas de gangrène provoquée par ce médicament sont fournis par des malades en état d'hypoadrénalinémie.

([1]) G. Ganter, *Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmakol.*, **113**, 1926, p. 129-150.

([2]) C. Heymans et P. Regniers, *Arch. internat. de Pharmacodynamie*, **33**, 1927, p. 236-249.

([3]) Nous parlons d'indice adrénalinique sanguin et non de teneur du sang en adrénaline car il y a lieu de faire état des influences ioniques, endocrines et autres qui modifient l'activité de l'adrénaline circulante.

PHARMACODYNAMIE. — *Influence de la pseudococaïne droite sur l'action hypertensive de l'adrénaline.* Note de M. **Fernand Mercier**, présentée par M. A. Desgrez.

Depuis que Frohlich et Lœwi (¹) ont découvert que la cocaïne augmente l'action hypertensive de l'adrénaline, de très nombreux travaux ont été publiés sur le synergisme de ces deux substances, et ont donné lieu, comme corollaire, à des recherches pharmacodynamiques orientées dans deux voies différentes.

D'une part de nombreux expérimentateurs ont cherché quelle était l'influence de la cocaïne sur les effets hypertenseurs des amines sympathomimétiques : tyramine, éphédrine, phényléthylamine, sympathol, artérénol, etc., et cette méthode a donné lieu à un essai de classification pharmacodynamique de ces amines : les seules amines vraiment « adrénaliniques » étant celles qui, comme l'adrénaline, ont leurs effets hypertenseurs augmentés par la cocaïne et inversés par la yohimbine.

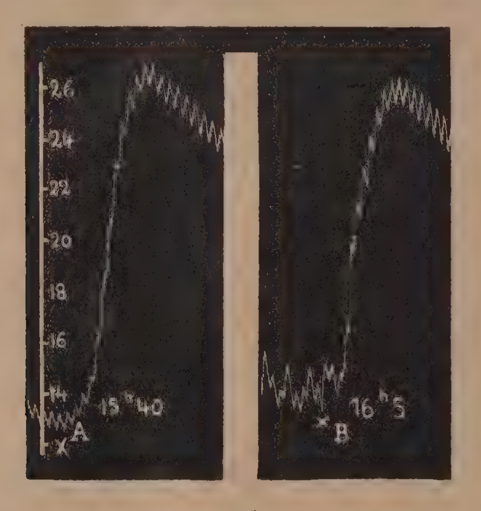
D'autre part des expériences ont été faites pour rechercher l'influence des divers succédanés de la cocaïne sur l'action hypertensive de l'adrénaline. C'est ainsi que, d'après Hatcher et Eggleston (²), Sternberg (³), Langecker (⁴), la novocaïne, comme la cocaïne, augmente l'effet hypertenseur de l'adrénaline. Il en est de même d'après Eggleston et Hatcher (⁵), pour l'alypine, la β-eucaïne, l'holocaïne, la nirvanine, l'apothésine, la stovaïne et la tropacocaïne.

A notre connaissance des recherches semblables n'ont pas été faites pour la pseudococaïne droite, isomère optique et stéréochimique de la cocaïne officinale. Nous présentons dans cette Note le résultat de nos expériences sur ce sujet.

Nous avons employé la technique préconisée par Tainter et Chang (⁶) chez le chien et le chat, et utilisée par Raymond-Hamet (⁷) chez le chien chloralosé : chez le chien

(¹) Frohlich et Lœwi, *Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmakol.*, 62, 1910, p. 159.
(²) R. A. Hatcher et C. Eggleston, *Journ. of Pharmacology*, 8, 1916, p. 385.
(³) H. Sternberg, *Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmakol.*, 100, 1923, p. 112.
(⁴) H. Langecker, *Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmakol.*, 129, 1928, p. 202.
(⁵) C. Eggleston et R. A. Hatcher, *Journ. of Pharmacology*, 13, 1919, p. 433.
(⁶) M. L. Tainter et D. K. Chang, *Journ. of Pharmacology*, 30, 1927, p. 193.
(⁷) Raymond-Hamet, *Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmakol.*, 160, 1931, p. 1.

anesthésié par le chloralose, soumis à la respiration artificielle et dont on a sectionné les pneumogastriques, on recherche l'hypertension produite par l'injection intraveineuse de $\frac{5}{100}$ de milligramme de chlorhydrate d'adrénaline. Lorsqu'on a obtenu, après plusieurs injections successives de cette même dose, des courbes hypertensives de même hauteur (en ayant soin d'éliminer les animaux chez lesquels la hauteur de la courbe ne se stabilise pas) on injecte à l'animal, sous la peau du flanc, une dose de chlorhydrate de pseudococaïne droite de 20 à 30^{mg} par kilogramme. On attend un certain temps pour permettre une complète résorption de la pseudococaïne droite, on fait alors une nouvelle injection de $\frac{5}{100}$ de milligramme d'adrénaline, et l'on compare entre elles les courbes obtenues avant et après l'injection de pseudococaïne droite.



Chien de 10^{kg} chloralosé (0^{g},12 par kilogramme), vagues sectionnés, soumis à la respiration artificielle. Enregistrement de la pression carotidienne par le manomètre à mercure. En A et en B injection intraveineuse de 5/100 mg de chlorhydrate d'adrénaline. Entre A et B, l'animal a reçu à 15^{h}45^{m} une injection sous-cutanée de 200^{mg} (20^{mg} par kilogramme) de chlorhydrate de pseudococaïne droite. (Tracé réduit de 1/4.)

Dans une première série d'expériences, nous avons, comme les auteurs précédents l'ont fait pour la cocaïne, laissé s'écouler 20 minutes entre l'injection sous-cutanée de pseudococaïne droite et l'injection subséquente d'adrénaline. Mais, comme nous l'avons montré dans des recherches antérieures en collaboration avec J. Régnier [1], la pseudococaïne droite se résorbant beaucoup plus vite que son isomère officinal, nous avons, dans une seconde série d'expériences, diminué le temps qui sépare l'injection de pseudococaïne droite de l'injection ultérieure d'adrénaline et fait celle-ci : 15 minutes, 10 minutes et même 5 minutes après l'injection de l'isomère cocaïnique.

(1) J. Régnier et F. Mercier, *Bull. Sc. Pharmacol.*, 37, 1930, p. 65, 219, 314.

Dans ces conditions expérimentales, quel que soit le temps laissé à la résorption pour s'effectuer, nous avons constaté, comme cela est visible sur le tracé qui illustre cette Note, que le chlorhydrate de pseudococaïne droite n'augmente pas l'effet hypertenseur de l'adrénaline. Alors que, dans les mêmes conditions expérimentales, l'hypertension adrénalinique est augmentée quelquefois de 30 pour 100 par l'injection de cocaïne gauche, avec la pseudococaïne droite l'effet hypertenseur adrénalinique est ou inchangé ou même, le plus souvent, diminué.

Ces résultats confirment les constatations que nous avons déjà faites sur le comportement physiologique différent de la cocaïne et de son isomère, la pseudococaïne droite.

BIOLOGIE. — *La castration expérimentale des femelles de Gammariens et sa répercussion sur l'évolution des oostégites.* Note [1] de Mme **M.-L. Le Roux**, présentée par M. Ch. Gravier.

J'ai montré récemment [2] que les soies qui apparaissent sur les oostégites des femelles de Gammariens au moment de la puberté et se renouvellent ensuite à chaque mue ne se forment plus chez des femelles de *Gammarus pulex* (L.) castrées par des larves de *Polymorphus minutus*. J'ai précisé en outre que les ovaires de ces femelles ne sont pas détruits mais seulement arrêtés dans leur évolution. Ces observations n'ont pas permis cependant de décider si l'absence des soies sur les oostégites est la conséquence directe de l'arrêt de développement des ovaires, ou si ce sont les troubles apportés par le parasite au métabolisme de l'hôte qui déterminent d'une façon synchrone, d'une part l'inhibition de l'ovaire et d'autre part la non-formation des soies. C'est dans le but d'élucider cette question que j'ai entrepris d'effectuer une série de castrations expérimentales chez des femelles de Gammariens.

J'ai choisi comme matériel d'expérience une espèce d'eau saumâtre *Gammarus Duebeni* Lillj. dont je pratique couramment l'élevage depuis plusieurs années. Cette espèce présente l'avantage d'avoir des téguments transparents, ce qui me permet de suivre l'évolution des ovaires sur l'animal vivant.

---

(1) Séance du 3 novembre 1931.

(2) *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 889.

Chez les femelles normales témoins, on observe pour la première fois sur l'exuvie 9 la présence de lames ovigères lisses très petites. Sur les exuvies 10, 11, 12 et 13, on peut constater que ces lames augmentent de taille tout en présentant toujours des bords lisses, alors que sur l'exuvie 14 et les suivantes elles sont bordées des longues soies caractéristiques de la femelle adulte. La première formation de ces soies a lieu dans l'intervalle des mues 12 et 13 en même temps que l'on voit se produire la première poussée de vitellogénèse. Il en résulte que l'apparition d'oostégites bordés de soies après la mue 13 coïncide exactement avec la première ponte.

J'ai entrepris de castrer des femelles en les soumettant au rayonnement du bromure de radium. Pour effectuer ces expériences, j'ai utilisé des aiguilles de verre ou de platine contenant chacune 1^{mg} environ de bromure de radium pur. Chaque femelle fut soumise à plusieurs reprises, pendant 72 heures chaque fois, à l'action de l'une de ces aiguilles, et le plus souvent aussitôt après une mue. J'ai effectué :

A. *Des irradiations prépubérales.* — La première irradiation a été faite avant la formation des oostégites, en général après les mues 6 ou 7, et la deuxième après la mue 12. Dans ce cas, on n'observe pas de vitellogénèse entre les mues 12 et 13, et l'exuvie 14 et les suivantes présentent des oostégites dépourvus de soies.

B. *Des irradiations postpubérales.* — Des femelles venant de pondre et, par conséquent, pourvues d'oostégites bordés de soies sont irradiées dans les mêmes conditions. L'inhibition de l'ovaire est très rapide; dès la mue suivante, les femelles ne pondent plus et leurs oostégites ne présentent plus de soies ovigères.

Dans les deux cas, de même que chez les femelles de *G. pulex* parasitées, les ovaires des femelles irradiées ne sont pas détruits. Il y a seulement arrêt du fonctionnement ovarien et, si de nouvelles irradiations ne sont pas effectuées, l'on observe après quelques mues une nouvelle poussée de vitellogénèse et corrélativement la réapparition des soies ovigères. Par contre, si l'on renouvelle l'irradiation toujours en temps voulu, l'on obtient des femelles qui ne pondent jamais et gardent toute leur vie des oostégites de femelles impubères (exp. A); et dans le cas d'irradiations toutes postpubérales (exp. B), des femelles qui perdent définitivement leurs soies en même temps que leur possibilité de ponte.

Ces expériences justifient donc l'hypothèse que les femelles de *G. pulex* parasitées par des larves de *P. minutus* avant la puberté n'ont jamais acquis

de soies ovigères, et que celles qui ont été parasitées plus tardivement les ont perdues. De plus, elles montrent que des irradiations précoces, effectuées avant la mue 9 et qui se montrent efficaces plus tard par l'inhibition de l'ovaire et la non-formation des soies, ne troublent aucunement le développement des oostégites qui s'effectue au même stade que chez les femelles normales. Enfin, elles permettent de conclure, avec de fortes probabilités, que le fonctionnement de l'ovaire tient sous sa dépendance la formation des soies ovigères. On pourra objecter que le bromure de radium a pu agir directement sur la formation des soies des oostégites. Mais cette objection me paraît devoir être rejetée du fait que les femelles de Gammariens présentent de nombreuses soies autres que celles des oostégites et que seules ces dernières disparaissent lorsque les ovaires cessent de fonctionner. Il me paraît d'ailleurs également difficile d'admettre que chez les femelles de *G. pulex* les variations du métabolisme sous l'action du parasite aient une action empêchante limitée aux soies ovigères.

En résumé, chez les Crustacés amphipodes femelles, la différenciation de certains caractères sexuels secondaires (soies ovigères) est déterminée par le fonctionnement des gonades, alors que d'autres (oostégites) évoluent indépendamment de celles-ci ([1]).

BIOLOGIE. — *Sur l'existence de mâles d'origine parthénogénétique et sur la constitution génotypique des femelles parthénogénétiques de* Trichoniscus (Spiloniscus) Elisabethæ *Herold* (*Crustacés, Isopodes*). Note de M. **A. Vandel**, présentée par M. M. Caullery.

J'ai montré ([2]) que j'avais confondu, sous le nom de *Trichoniscus provisorius*, deux espèces distinctes : *provisorius* Racovitza et *elisabethæ* Herold. Quels sont les rapports de la forme parthénogénétique et de ces deux espèces ? La race parthénogénétique appartient à l'espèce *elisabethæ*, mais est parfaitement distincte de *provisorius*. Cette conclusion découle de deux ordres de faits :

([1]) Mes résultats sont en accord avec ceux obtenus par V. Haemmerli-Boveri sur les femelles d'un Crustacé Isopode *Asellus aquaticus* L. (*Zeitschrift für vergleich. Physiol.*, **4**, 1926, p. 668-698).

([2]) *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 752.

1° J'ai signalé [1] le fait, au premier abord paradoxal, que les femelles parthénogénétiques recueillies à Toulouse s'accouplent facilement avec les mâles de Montpellier et de Port-sur-Saône [2], mais n'exercent aucune attraction sur les mâles de Toulouse. J'ai vérifié à maintes reprises cette différence de comportement. Elle s'explique maintenant fort bien, car les mâles de Montpellier et de Port-sur-Saône d'une part, les mâles de Toulouse d'autre part, appartiennent à deux espèces distinctes : les premiers à *elisabethæ*, les seconds à *provisorius*. L'attraction sexuelle exercée par les femelles parthénogénétiques sur les mâles d'*elisabethæ*, à l'exclusion des mâles de *provisorius* prouve que la race parthénogénétique se rattache à la première espèce et non à la seconde.

2° Je cultive, depuis deux ans, deux biotypes où, contrairement à la règle générale, les femelles parthénogénétiques engendrent occasionnellement des mâles. Ces deux biotypes proviennent de la bordure de la Montagne Noire, l'un de la région occidentale (Sorèze), l'autre du versant méridional (Caunes-Minervois). Ces mâles d'origine parthénogénétique sont d'ailleurs rares. Je n'en ai obtenu jusqu'ici (octobre 1931) que 8, bien que mes observations aient porté sur la descendance de près de 150 femelles. Or, l'examen morphologique de ces mâles démontre qu'ils appartiennent incontestablement au type *elisabethæ*.

Ces observations permettent de circonscrire le problème de l'origine de la forme parthénogénétique. Elle provient de la race bisexuée de *Tr.* (*Spiloniscus*) *elisabethæ*.

Caractères des mâles d'origine parthénogénétique. — Vu le nombre très faible de mâles observés, je n'ai pu encore en faire une étude complète. Ces mâles sont absolument normaux, et ne diffèrent en rien des mâles produits par les femelles bisexuées. Les testicules sont bien développés et renferment des spermatozoïdes normalement conformés. Cette observation conduit déjà à admettre que ces mâles sont diploïdes, car on sait que tous les mâles triploïdes connus sont stériles (H. J. Müller). L'étude cytologique le confirme. J'ai étudié un certain nombre de divisions spermatogoniales. Le nombre de chromosomes est égal à 16, ce qui correspond au nombre diploïde pour *Tr. elisabethæ*.

---

(1) *Bull. Biol. France-Belgique*, **62**, 1928, p. 164.

(2) Mais les œufs de ces femelles parthénogénétiques et triploïdes ne sont pas fécondés.

Mécanisme de la production des mâles d'origine parthénogénétique. — Je me suis assuré que les femelles des biotypes de Sorèze et de Caunes sont, comme les femelles parthénogénétiques normales, des formes triploïdes ($3n = 24$). Comment ces femelles triploïdes sont-elles capables de donner naissance à des mâles diploïdes? L'organisme triploïde provient d'un œuf engendré par la fusion de deux gamètes, dont l'un est haploïde et l'autre diploïde. Partant de là, on doit admettre qu'une dissociation des garnitures haploïde et diploïde se produit au moment de la maturation de l'œuf qui engendre le mâle. Étant donnée la rareté des mâles d'origine parthénogénétique et leur apparition sporadique, on comprend que la vérification de ce processus soit particulièrement ardue. Je signale seulement, cette étude cytologique n'étant pas achevée, que j'ai observé, dans deux individus de Caunes, des anomalies chromatiques, au moment de la maturation, se manifestant sous forme de groupements chromosomiques de valeur inégale.

Origine des femelles parthénogénétiques. — Les deux biotypes de Sorèze et de Caunes sont particulièrement intéressants, car ils représentent un stade où la forme parthénogénétique triploïde n'est pas encore parfaitement stabilisée et peut présenter, occasionnellement, une dissociation des garnitures haploïde et diploïde qui la constituent. Il est intéressant de remarquer que, si les femelles parthénogénétiques de ces deux biotypes engendrent accidentellement des mâles, je n'ai jamais observé la production, par parthogenèse, de femelles sexuées diploïdes. Ce qui semble prouver que la forme parthénogénétique triploïde provient d'un œuf normal fécondé par un spermatozoïde diploïde (ayant par conséquent la constitution chromosomique du mâle).

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Produits d'oxydation du d-mannose par l'oxyde de cuivre ammoniacal en présence de l'air, à la température ordinaire.* Note de M. **J. Parrod** et Mlle **Y. Garreau**, présentée par M. Georges Urbain.

L'un de nous [1] a montré que l'oxydation du *d*-glucose par l'oxyde de cuivre ammoniacal, en présence de l'air, à la température du laboratoire, donne naissance à l'acide oxalique, à l'imidazol, et au *d*-arabinotétraoxybutyl-4-imidazol.

J'ai recherché si, avec un sucre très voisin, comme le *d*-mannose, on pouvait obtenir les mêmes corps, et particulièrement les mêmes imidazols.

Ces deux sucres se distinguent uniquement, comme on le voit par les formules ci-dessous, par l'atome de carbone voisin de la fonction aldéhydique :

```
                     OH  H   OH  OH
                     |   |   |   |
d-glucose     COH — C — C — C — C — CH²OH
                     |   |   |   |
                     H   OH  H   H

                     H   H   OH  OH
                     |   |   |   |
d-mannose     COH — C — C — C — C — CH²OH
                     |   |   |   |
                     OH  OH  H   H
```

On peut prévoir que le *d*-mannose conduise également au *d*-arabinotétraoxybutyl-4-imidazol :

```
                  H   OH  OH
                  |   |   |
      //N —— C — C — C — C — CH²OH
  CH         ||   |   |   |
      \NH — CH   OH  H   H
```

L'atome de carbone en question, et celui qui porte la fonction aldéhydique contribuent en effet à la formation du noyau imidazol.

C'est bien là le résultat que nous a donné l'expérience.

En dehors de ce composé, nous avons isolé également, comme dans le cas du *d*-glucose, l'acide oxalique et l'imidazol, toutefois avec des rendements un peu différents.

---

[1] J. Parrod, *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 1136.

Nous rappellerons qu'avec le lévulose, dans des conditions identiques (concentrations du cuivre ammoniacal et du sucre, température, oxygénation et durée), ces corps ont été obtenus, et en outre l'oxyméthyl-4-imidazol ([1]).

Technique. — Nous avons utilisé les conditions expérimentales et les procédés de traitement décrits dans les communications signalées ci-dessus.

Le *d*-arabinotétraoxybutyl-4-imidazol a été identifié par les caractères suivants : aiguilles cristallines $F = 164°$, $[\alpha]_d = -19°,6$ (au lieu de $-19°,5$), diagramme de diffraction de rayons X, coloration rouge avec le *p*-diazobenzène-sulfonate de sodium.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Les glucides lévogyres des oignons de* Lycoris. Note de M. **H. Belval**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Les oignons de *Lycoris* (*Lycoris squamigera* Max.) renferment constamment, à côté de l'amidon qui constitue la réserve insoluble, un mélange de glucides solubles : sucres réducteurs, saccharose et substances lévogyres, ces dernières étant de beaucoup les plus abondantes.

La marche de l'inversion diastasique montre avec évidence que la saccharose n'est pas le seul glucide tributaire de la sucrase : en effet, l'hydrolyse, rapide d'abord, ne se poursuit plus au bout de quelques heures qu'avec une extrême lenteur, se continue pendant une semaine et plus, en même temps que croît l'indice de réduction diastasique. Par ailleurs, après action de la sucrase, l'hydrolyse par HCl provoque toujours une nouvelle et forte déviation vers la gauche. On devait naturellement penser à la présence de plusieurs substances lévogyres. De fait, on a pu en préparer deux à l'état pur.

Pour les séparer on a d'abord mis à profit les différences de solubilité des composés barytiques, dont l'un est insoluble et l'autre très soluble. Il est plus simple d'abandonner dans un endroit frais les liqueurs alcooliques d'extraction, après filtration pour éliminer toute trace d'amidon et de matières étrangères; une substance blanche se dépose presque pure du premier coup, que je désigne provisoirement sous le nom de *fructoside* A. Quant à la liqueur, après concentration, défécation et addition de baryte concentrée, elle fournit par addition de son volume d'alcool un abondant

([1]) Pierre Girard et J. Parrod, *Comptes rendus*, 190, 1930, p. 328.

précipité blanc qu'il reste à décomposer par les procédés ordinaires; on obtient de la sorte un second produit, le *fructoside* B.

3^{kg} de bulbes, récoltées en mai, à l'époque où les feuilles commencent à se dessécher, bien avant la floraison qui a lieu en août-septembre, ont fourni 24^g de fructoside A, renfermant 0,66 pour 100 de cendres, et 93^g de fructoside B renfermant 0,45 pour 100 de cendres.

Ces deux fructosides diffèrent par toutes leurs propriétés, dont nous donnons brièvement ici les plus caractéristiques.

Fructoside A. — Il se présente sous forme de poudre blanche très peu hygroscopique, très peu soluble dans l'eau froide (6,4 pour 100 à 20°) mais très soluble dans l'eau chaude. Les pouvoirs rotatoires $[\alpha]_0$ sont respectivement, avant et après action de HCl : -34 ($\alpha = -3°$); $\pi = 4^g,42$; $l = 2$) et -81 ($\alpha = -3°32$; $\pi = 2^g,18$; $l = 2$; $t = 20°$). Le poids moléculaire, calculé par cryoscopie, comparativement avec des solutioes de saccharose, se montre voisin de 1350. Quant au point de fusion, il n'est pas net; au bloc Maquenne, la poudre demeure sans changement jusqu'à 173°, à 173°, elle commence à jaunir et jusque vers 200° se transforme en produits de plus en plus noirs.

Ces propriétés ne permettent de rapporter cette substance à aucun fructoside connu; l'inuline, dont elle semble se rapprocher le plus, s'en distingue nettement par son poids moléculaire.

Fructoside B. — Au contraire du produit A, c'est une poudre très hygroscopique : après dessication dans le vide sur P^2O^5 elle perd encore, dans l'étuve à 110°, 4,54 pour 100 de son poids, en même temps qu'elle foisonne et finit par occuper un volume 5 à 6 fois supérieur au volume initial: elle est de plus très soluble dans l'eau froide et même dans l'alcool à 80°. Les pouvoirs rotatoires, calculés à partir du produit desséché à l'étuve, sont avant et après action de HCl : -19 ($\alpha = -1°48$; $\pi = 4,68$; $l = 2$), et -67 ($\alpha = -6°20$; $\pi = 4,68$; $l = 2$; $t = 20°$). Le poids moléculaire, déterminé en opérant comme précedemment, s'est constamment trouvé voisin de 600. Au bloc Maquenne, la poudre commence à jaunir dès 110°, en se boursoufflant et vers 155° on n'a plus qu'un produit noir sans qu'il soit possible de saisir un point de fusion véritable. L'action de la sucrase nulle sur le produit A, est ici très caractéristique : elle est lente et incomplète. Il ne semble pourtant pas qu'on soit en présence d'un mélange de deux corps dont l'un serait tributaire de la sucrase et l'autre non : la fraction qui demeure non hydrolysée par la surcrase, outre qu'elle présente

toujours les mêmes propriétés que le produit initial, varie notablement selon les conditions de l'expérience; de plus, une fois l'équilibre atteint on peut par de nouvelles additions de sucrase pousser l'inversion un peu plus loin, sans toutefois obtenir jamais une hydrolyse totale.

Ce sont là autant de propriétés qui font de ce fructoside un produit très semblable, sinon identique, à l'asphédéloside étudié récemment par C. Neyron [1].

On aurait donc ainsi extrait des bulbes de Lycoris deux fructosides, l'un nouveau selon toutes vraisemblances, que nous proposons de nommer Lycoroside, l'autre analogue à celui des Asphodèles; ce qui montre une fois de plus l'extrême variété des matières de réserve dans les organes des Monocotylédones.

PATHOLOGIE. — *Sur les facteurs de l'évolution des cancers de goudron chez la Souris.* Note de MM. **F. Vlès, A. de Coulon, A. Ugo**, présentée par M. A. d'Arsonval.

A la suite des recherches que nous avons effectuées depuis quelques années sur les propriétés physico-chimiques de l'organisme dans le cancer [2], nous avons jugé indispensable de reprendre l'étude systématique de la cancérisation par le goudron, pour préciser les principaux facteurs qui permettent d'orienter son évolution dans telle ou telle direction.

Un élevage de Souris, comprenant environ 1200 animaux, a été soumis à des observations statistiques pendant un goudronnage de plusieurs mois (trois fois par semaine sur la nuque, avec du goudron Bloch de Zurich). Le badigeonnage était poursuivi après l'apparition des papillomes jusqu'à la constatation de la cancérisation de ceux-ci, entre le quatrième et le huitième mois; un examen histologique était pratiqué à ce moment au moyen

---

(1) C. Neyron, *Recherches sur le principe fermentescible des tubercules d'Asphodèle*, Thèse Univ., Paris, 1930.

(2) F. Vlès et A. de Coulon, *Revue des notions actuelles sur un problème de physico-chimie pathologique* [*Arch. Phys. biol.*, 7, v (fasc. suppl.), 1929, p. 1-64]; *Recherches sur les propriétés physico-chimiques des tissus en relation avec l'état normal ou pathologique de l'organisme*. 10e partie : *Nouvelles recherches sur les tumeurs de goudron de la Souris par certains amino-acides* (*Arch. Phys. biol.*, 9, 1, 1931, p. 1-28).

d'une biopsie par le professeur Nicod. A côté de cet élevage-témoin, d'autres lots de Souris (comprenant au total environ 800 animaux) subissaient, en plus du goudronnage, diverses actions expérimentales destinées à interférer avec l'action du goudron. Dans tous les cas, chaque lot correspondait au point de vue sexe et âge, à une catégorie homogène (jeunes mâles, femelles vierges, vieilles femelles, etc.).

Pour chacun des lots, on a constitué un *graphique d'apparition des papillomes et des cancers*, en portant en fonction du temps la proportion en centièmes des papillomes ou des cancers constatés. Pour éviter les perturbations apportées par les disparitions accidentelles des Souris pendant la longue période préliminaire du badigeonnage, on a pris comme base de la proportion, non pas le nombre initial de Souris de chaque lot, mais le nombre encore existant au moment de l'apparition du premier papillome.

1. Caractère des courbes d'apparition des papillons et des cancers. — Les courbes obtenues sont le plus souvent des courbes en S régulières qu'il est facile de ramener à uue expression

$$J = K + A \log \frac{X}{B - X}$$

dans laquelle J est le temps en jours depuis le début du goudronnage, X la proportion en centièmes des papillomes ou des cancers correspondant au

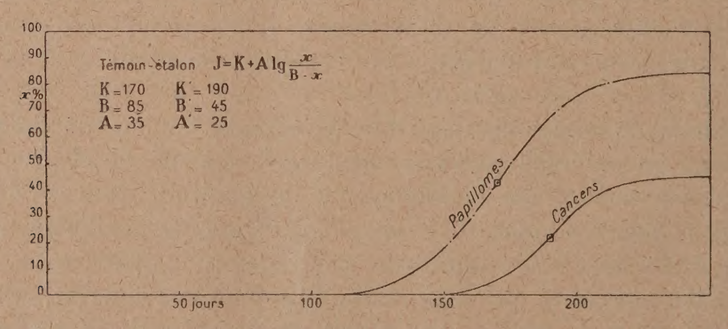


Fig. 1. — Courbes du témoin-étalon calculées avec les constantes les plus fréquentes.

temps J, et B la proportion correspondant à l'asymptote horizontale finale. Sur un lot de 875 témoins, on a déterminé par la méthode des polygones de fréquence, les valeurs les plus fréquentes de K, B, A; en introduisant ces constantes dans l'équation précédente, on a donc pu représenter l'évolution du témoin-type le plus probable (*fig.* 1). La courbe ainsi établie est relative à la population totale sans distinction de

catégories; il est possible que de légères différences soient introduites, en particulier par les sexes.

2. Actions expérimentales. — Diverses actions expérimentales ont ainsi pu être comparées au moyen des constantes K, B, A de leurs courbes. Nous ne retiendrons ici que les conclusions relatives à quelques cas particulièrement typiques :

a. Alimentation par les œufs. — L'alimentation prédominante des Souris au moyen de jaunes d'œufs cuits (4 jaunes par jour pour 30 Souris, inter-

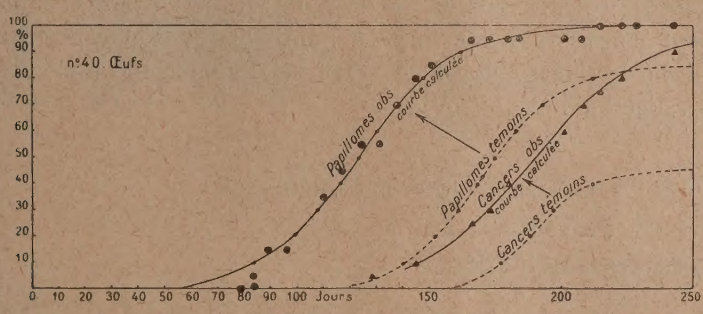


Fig. 2. — Courbes d'apparition des papillomes et des cancers pour les Souris nourries aux œufs.

calés entre des portions réduites du régime ordinaire) a eu un effet particulièrement remarquable d'activation sur les papillomes apparus et en outre sur la cancérisation : papillomes et cancers ont été plus précoces et ont abouti à un pourcentage final plus considérable (*fig.* 2).

b. Facteurs physiques. — Un facteur particulièrement intéressant s'est

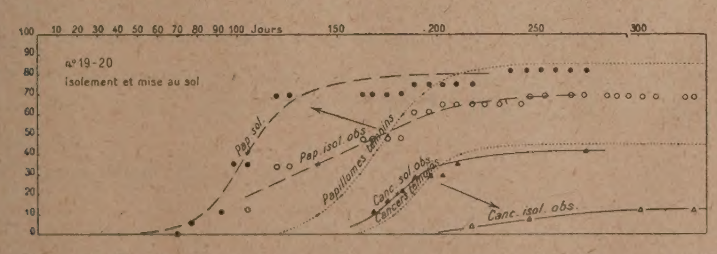


Fig. 3. — Courbes d'apparition des papillomes et des cancers pour les Souris isolées ou mises au sol.

montré lié à l'isolement électrostatique ou la mise au sol des lots de Souris (au moyen de cages munies de fonds conducteurs en fer galvanisé reliés à

des prises de terre) [1] : les papillomes des lots au sol ont été nettement en avance sur les papillomes des lots témoins ou isolés; les cancers des lots isolés ont été nettement en retard sur les cancers des lots au sol ou des témoins (*fig.* 3).

Une autre perturbation a été produite par l'élevage en cages obscures et closes, papillomes et cancers étant dans ce cas déprimés par rapport aux témoins.

c. Séparation des éléments du goudron. — Enfin certains essais de séparation des constituants du goudron ont, jusqu'à présent, conduit à un relèvement considérable de l'action papillomateuse et cancérigène : tel est l'épuisement par le chloroforme (la fraction chloroformique accélère, le résidu est d'action presque nulle).

A 15h45m l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16h20m.

A. Lx.

---

(1) F. Vlès et A. de Coulon, *Observations sur les différences de réceptivité pour certains cancers, en parallèle avec la connexion des organismes au sol* (*Arch. Phys. biol.*, 8, III-IV, 1930, p. 282-285).